Exercices - Chapitre 9-Ensembles, applications.

♥ *A savoir refaire* - ♦ *Corrigé*

① Ensembles

♥ **9.1** Soit A et B deux parties de E, on note $\mathbb{I}_A$ et $\mathbb{I}_B$ les fonctions indicatrices respectives de A et de B. Déterminer les fonctions indicatrices de : E, $\varnothing$, $A\cap B$, $A\cup B$, $\overline{A}$.

9.2 Soit A et B deux parties de E, on définit la **différence symétrique** de A et de B comme suit:
$A \,\Delta\, B = \{ x\in E,\ x\in A\cup B \text{ et } x\notin A\cap B \}$

a. Exprimer $A \,\Delta\, B$ à l'aide des opérations usuelles sur les parties et la représenter sur un diagramme.

b. Déterminer $\mathbb{R}^+ \,\Delta\, \mathbb{R}^-$, $]-\infty\,;2] \,\Delta\, [1\,;+\infty[$, $A \,\Delta\, E$ et $A \,\Delta\, \varnothing$.

c. Montrer que $\forall (A,B)\in(\mathcal{P}(E))^2$, $A \,\Delta\, B = (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

d. Déterminer $A \,\Delta\, A$ puis résoudre dans $\mathcal{P}(E)$, $A \,\Delta\, X = \varnothing$

e. Démontrer que $\mathbb{I}_{A\Delta B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - 2\times\mathbb{I}_A\times\mathbb{I}_B$ et en déduire que $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$

♦ **9.3** Discuter et résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations suivantes, où A et $B\in\mathcal{P}(E)$.

a. $A\cup X = B$

b. $A\cap X = B$

Il est conseillé d'utiliser des diagrammes pour se représenter la situation.

9.4 ***Famille de parties***

a. Ecrire l'ensemble de définition des fonctions suivantes : $f(x) = \sqrt{\cos x + \dfrac{1}{2}}$ et $g(x) = \ln(\tan x)$

b. Montrer que $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[-n,n\right]$ et $\{0\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2n+1}\right[$

② Applications

♥ **9.5** f désigne la fonction sinus, déterminer

$f(\mathbb{R})$ $f^{-1}(\mathbb{R})$ $f\left(\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ $f^{-1}(\{1\})$ $f^{-1}(\,]-1;2[\,)$ $f^{-1}(f([0;\pi]))$ $f^{-1}(f([0;\pi/2]))$ $f(f^{-1}(\mathbb{R}_+))$

♥ **9.6** Soit A et B deux parties de E et $f\in\mathcal{F}(E, F)$.

1. Dans cette question $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$, déterminer $f(\,[0, 2]\,)$, $f(\,[-3, 2]\,)$ et $f(\,[-2,1]\,)$

2. Montrer que :

a. $A\subset B \Rightarrow f(A)\subset f(B)$

b. $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$

c. $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$. A-t-on égalité ?

♥ **9.7** Soit A et B deux parties de F et $f\in\mathcal{F}(E, F)$.

1. Dans cette question $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos x$,

déterminer $f^{-1}(\,[-4, 0]\,)$, $f^{-1}(\,[-1, -\frac{1}{2}]\,)$ et $f^{-1}(\,[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\,)$.

2. Montrer que :

a. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

b. $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

c. $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

d. $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

♦ **9.8** Soit $f:E\to F$, $A\subset E$ et $B\subset F$.

a. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et $A \subset f^{-1}(f(A))$

b Trouver une application f et des parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que : $f(f^{-1}(B)) \neq B$ et $f^{-1}(f(A)) \neq A$

On pourra utiliser l'exercice 9.5

c. Montrer que $\forall B\in\mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$ ssi f est surjective

d. Montrer que $\forall A\in\mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$ ssi f est injective

9.9 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + z + 1$.
a. Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$ et $f(\mathbb{R})$.
b. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.
c. f est-elle injective ? Surjective ?

♥ **9.10** Pour les applications suivantes vérifier qu'elles sont bien définies puis dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

b. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2x+3y, x+2y)$

c. $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$

d. $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n - 1$ si $n \neq 0$ et $f(0) = 0$.

e. $\varphi : \mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C}\setminus\{i\}$, $\varphi(z) = \dfrac{iz+i}{z-i}$

f. $\Phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\Phi(f) = f'$

9.11 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une application injective. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$ alors $f = Id_{\mathbb{N}}$.

9.12 Soit f: $\begin{cases} \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^* \\ (p,q) \mapsto 2^p(2q+1) \end{cases}$. Montrer que f est surjective.

9.13 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(x) = 1 - x$ si $s \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = x - \frac{1}{2}$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Montrer que f est bijective et préciser f^{-1}.

♦ **9.14** On note D l'ensemble des nombres complexes de module supérieur à 1.
On considère f : $\begin{cases} D \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z^2+1}{2z} \end{cases}$.
a. Démontrer que f est surjective. Est-elle injective ?
b. Déterminer l'image de $\mathbb{U}$ par f.

♦ **9.15** Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f injective $\Leftrightarrow$ f bijective.

♥ **9.16** Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que: $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Leftrightarrow$ f injective

9.17 Soit $f : E \to F$ une application.
a. Soit Y une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(E)$.
Que se passe t'il si f est surjective ?
b. Soit A une partie de E et B une partie de F. Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

♦ **9.18** Soit A et B deux parties fixées d'un ensemble E.
On définit l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.
a. Prouver que f injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$
b. Prouver que f est surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

♥-♦ Quizz : Vrai ou faux ?

① Toute fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ est injective.
② Si une application n'est pas injective alors elle est surjective.
③ Si une application est bijective alors elle est surjective.
④ L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ est surjective.
⑤ Si f et g sont deux applications de E dans E telles que $f \circ g = Id_E$ alors f ou g est bijective.
⑥ La restriction d'une injection est une injection.
⑦ La restriction d'une surjection est une surjection.
⑧ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut déterminer $f^{-1}([0,1]$ seulement si f est bijective.
⑨ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection alors f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$.