Exercices-Chapitre 10: Fonctions usuelles 2

♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

♦ **10.1** Montrer que $\forall x \geq 0,\ \arctan(\mathrm{sh}x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}\right)$

10.2 Soit x > 0, simplifier arctan(x+2) - arctan(x). En déduire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2+2k+1}\right)$.

♦ **10.3** ***Une fonction hyperbolique réciproque***

a. Justifier que la restriction du cosinus hyperbolique à $\mathbb{R}_+$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à déterminer

b. On note argch la bijection réciproque.. Calculer argch(1) puis établir que :

$\forall x \in [1, +\infty[$, $\mathrm{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

c. Etudier la régularité de argch, donner sa dérivée, son tableau de variation et sa courbe représentative.

♥ **10.4** Démontrer les égalités suivantes en précisant leur domaine de validité:

a. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ b. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ c. $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

d. $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ e. $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ f. $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

♥ **10.5 Valeurs exactes:** Calculer:

A = cos(arccos(1/3)), B = sin(2arccos(1/3)), C = arccos(cos(π/3))

D = arccos(cos(-π/3)), E = arccos(cos(10π/3)), F = arccos(cos(π/3 + kπ)) avec $k\in\mathbb{Z}$.

10.6 Valeurs exactes, suite : Calculer :

$\alpha = \sin\left(\dfrac{1}{2}\arcsin(\dfrac{7}{25})\right)$ β = arctan(1/2) + arctan(1/3) γ = arctan(2) + arctan(3)

♦ $\delta = 2\arctan(\dfrac{1}{3}) + \arctan(\dfrac{1}{7})$

♦ **10.7** ***Une formule pour l'argument principal d'un complexe non nul***

Soit z = x+ iy un complexe non nul et $\theta \in]-\pi,\pi]$ l'argument principal de z.

a. Déterminer θ lorsque $z \in i\mathbb{R}$.

b. On suppose $z \notin i\mathbb{R}$, justifier que $\tan\theta = y/x$.

c. En distinguant trois cas, exprimer θ en fonction de x et y.

♥ **10.8** Résoudre dans $\mathbb{R}$

a. arccosx = arcsin(2x) b. $\arccos(x) = \arccos(\dfrac{1}{3}) + \arccos(\dfrac{1}{4})$

c. $\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \dfrac{\pi}{2}$

10.9 Représenter les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par f(x) = arcos(cosx) et g(x) = arcsin(sin(2x))

10.10 Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes

$f_1 : x \mapsto \arcsin\dfrac{1}{x}$ $f_2 : x \mapsto \arcsin(4x) + \arccos(1-2x^2)$ $f_3 : x \mapsto \arccos\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$

$f_4 : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $f_5 : x \mapsto \arcsin x - 2\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

♥ **10.11** On pose $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$
a. Quel est l'ensemble de définition de f?
Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à [0 ;1].
b. Etudier la dérivabilité de f sur [0;1], calculer f'(x) puis simplifier f(x).

c. Une autre méthode : Justifier que l'on peut poser x = sint avec $t \in [0;\frac{\pi}{2}]$ et conclure.

♦ **10.12** Simplifier l'expression $g(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ pour $x \in [-1, 1]$.

♦ **10.13** Démontrer les égalités suivantes en précisant leur domaine de validité :

$\arctan(\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = -\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan(|x|)$

10.14 Déterminer une primitive de arctan sur ℝ, puis de arcsin sur [-1, 1] après avoir justifié leurs existences.

10.15 Calculer les intégrales et primitives suivantes

a. $\int^x \frac{t^2}{t^2+3}dt$ $\qquad$ b. $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}\,(t+3)}dt$ $\qquad$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx$

d. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$ en posant x = sin(u) puis tan(u) = t

10.16 Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants, en précisant le domaine de validité :

a. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ $\qquad$ b. $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$ $\qquad$ c. $f : x \mapsto \frac{3x^2-2x+1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ d. $f : x \mapsto \frac{3x^2-2x+1}{x^2+1}$

♦ **10.17** Résoudre sur ℝ $(x^2 + 1)^2y' + 2x(x^2 + 1)y = 1$

10.18 Résoudre sur]-1, 1[l'équation $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ en posant x = sint

---

♦ **Petit Quizz: Répondre par Vrai ou Faux**

- arccos est définie sur $[0, \pi]$
- arcsin est définie sur [-1, 1]
- cos(arccos (0,2)) = 0,2
- arctan est bornée
- ch est bornée sur ℝ.
- $\arctan x = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$
- $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})) = -\frac{\pi}{3}$
- $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$
- arcsin est dérivable sur [-1, 1] et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Calculus