Exercices – Chapitre 11: Suites numériques partie 1

♥ A savoir refaire- ♦ Corrigé

♥ *Comportement global*

11.1 Etudier la monotonie des suites suivantes :

a. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$ **b.** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{e^n}{n}$ **c.** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}$, $\alpha\in]0\ ;\pi[$

d. $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ **e.** $u_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$

11.2 Démontrer que les suites suivantes sont bornées

a. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ **b.** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ **c.** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n + \sin(n)}{\cos(n)+3}$

Suite convergente, exercice théorique.

11.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle à valeurs entières. Prouver qu'elle est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

11.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle qui converge vers 0. On définit, $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} u_k$.

Montrer, avec la définition que $v_n \to 0$.

♦ **11.5** Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ avec $\ell\in\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\ell \geq 0$

b. On suppose que $\ell\in[0,1[$, montrer que (u_n) converge.

c. On suppose que $\ell > 1$, montrer que (u_n) est divergente.

d. Montrer avec des exemples que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

11.6 Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A.
Démontrer que : $M = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \exists (a_n)\in A^{\mathbb{N}},\ a_n \to M$

11.7 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que **A est dense dans $\mathbb{R}$** lorsque pour tout réels x et y tels que $x < y$, $A\cap]x, y[\neq \varnothing$.

1. On suppose que A est dense dans $\mathbb{R}$, et on considère un réel x_0.

1.a. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe une réel a_n de A tel que $a_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[$

1.b. Justifier que x_0 est la limite d'une suite à valeurs dans A.

2. Etudier la réciproque.

3. En utilisant l'équivalence démontrée ci-dessus, montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

♥ **11.8** ***Suites extraites***

a. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = n\cos(n\frac{\pi}{3})$. Montrer que u n'admet pas de limite.

b. On considère une suite u telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, montrer que u converge.

Limite de suite, exercice pratique.

♥ **11.9** Etudier la limite de (u_n) dans chacun des cas suivants

a. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left|u_n+3\right|\leq\dfrac{1}{n^2}$ **b**. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n > n - \ln(n)$ **c**. u croissante et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n < \dfrac{n+2}{n+1}$

♥ **11.10** Déterminer la limite des suites suivantes dont on donne le terme général :

a. $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ **b**. $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ **c**. $u_n=\dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$

d. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$ **e**. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2+k}$ **f**. $u_n=\prod_{k=1}^{n}(2-\dfrac{k}{2n})$

g. $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}dt$ **h**. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor k\sqrt{2}\right\rfloor$

♦ **11.11** On s'intéresse aux suites de termes généraux $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$.
a. Montrer que si u converge ou v converge alors u et v convergent.
Ind: On pourra supposer que $\lim u_n = \ell$ et calculer u_{n+1}.
b. Montrer par l'absurde que ces deux suites sont divergentes
Ind: On pourra exploiter les relations reliant u et v.

♥ **11.12 Suite définie implicitement**
Pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout réel $x > 0$, on pose : $f_n(x) = x - n \ln x$. On donne : $\ln(2) \approx 0,7$.
1.a. Soit $n \geq 3$. Etudier les variations de la fonction f_n sur son ensemble de définition.
b. Soit $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]1, 2[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.
2.a. Soit $n \geq 3$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.
En déduire que la suite (x_n) est monotone et donner son sens de monotonie.
b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est convergente.
c. En utilisant que pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$, montrer que : $x_n \to 1$.

Suites adjacentes

♦ **11.13 Moyenne arithmético-géométrique**.
Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Leur moyenne arithmétique est $\dfrac{a+b}{2}$ et leur moyenne géométrique $\sqrt{ab}$.

a. Montrer que $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$

b. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases}a_0=a\\ \forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}\end{cases}$ et $\begin{cases}b_0=b\\ \forall n\in\mathbb{N}, b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\end{cases}$.

Montrer que ces suites sont adjacentes,
Leur limite commune est la moyenne arithmético-géométrique et a et de b.

♥ **11.14 *e est un irrationnel***

On considère la suite u définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

a. On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$, montrer que u et v sont adjacentes puis justifier que u converge vers une limite L.

b. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1\dfrac{(1-x)^n}{n!}e^x dx$.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$ et en déduire une expression de I_n en fonction de u_n

c. Montrer que $I_n \to 0$ et en déduire la valeur de L

b. En utilisant les questions précédentes, montrer que $e\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

♥ **11.15** On considère la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-...+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

a. Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, que peut-on en déduire ?

b. Justifier que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$

c. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \, = \ln 2 - (-1)^n\int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t}dt$ et déterminer lim S_n.

Récurrence linéaire

11.16 Etudier les suites suivantes et préciser leurs limites si elles existent

a. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{2}+1 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n - 3 \end{cases}$

♥ **11.17** Etudier les suites suivantes et préciser leurs limites si elles existent.

a. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} - \sqrt{3}u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 6 \end{cases}$ **e.** $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$

♦ **11.18** Soit les suites u et v telles que $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

a. Montrer que u est une suite linéaire récurrente d'ordre 2

b. Expliciter u_n et v_n.

11.19 Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par :
$u_0 = -1$, $u_1 = -1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n$.
a. Ecrire une fonction Python permettant de calculer u_n, pour $n\in\mathbb{N}$.
b. Simplifier $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
c. Expliciter u_n en fonction de n
On pourra utiliser une somme télescopique.