

Exercices - Chapitre 11: Suites numériques partie 2

♥ A savoir refaire- ♦ Corrigé

Relation de comparaison

11.18 Démontrer les propriétés suivantes, lorsque $n \rightarrow +\infty$

a. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b. $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 = 1 + \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

c. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d. $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

♥ 11.19 Compléter les pointillés avec $n \ln(n)$, n^2 , n , $\sqrt{n} \ln(n)$, $\frac{\ln(n)}{n}$.

..... < < < <

Recommencer avec $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n \ln(n)}$, $\frac{\ln(n)}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{\ln(n)}{n^2}$

11.20 Compatibilité avec les opérations

a. Justifier que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $\left(2 + \frac{3}{n}\right)^2 = 4 + \frac{12}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.b. Déterminer α telle que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(2 + \frac{3}{n}\right)^2 = 5 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ c. Déterminer β telle que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \times \left(2 + \frac{3}{n}\right)^2 = 4 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ♥ 11.21 Donner un équivalent simple de u_n

a. $u_n = \frac{n^2 - 2}{n^2 + n}$

b. $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

c. $u_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n^2 + n}}$

d. $u_n = \frac{(e^{1/n} - 1)^2}{(n+1)^3 - n^3}$

e. $u_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$

f. $u_n = \sin\left(\frac{n+2}{n^2-1}\right)$

g. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+n}\right)$

h. $u_n = \cos(e^{-n}) - 1$

i. $u_n = \sin\frac{1}{n} - \tan\frac{2}{n}$

j. $u_n = \binom{n}{k}$ avec k fixé dans \mathbb{N}^* .

♥ 11.22 Equivalent d'une somme

Donner un équivalent simple de $s_n = \sum_{k=0}^n 2^k$ puis de $S_n = \sum_{k=1}^n k!$

♥ 11.23 Equivalent d'une suite implicite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique réel u_n solution de $x^n + nx - 1 = 0$ dans $[0, 1]$.Etudier la monotonie de u et montrer qu'elle converge vers 0.Donner un équivalent simple de u_n

♦ 11.24 Equivalent d'une suite récurrente

Soit la suite u définie par récurrence de la manière suivante par $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ a. Donner u_2 et u_3 b. Démontrer que $\forall n \geq 1$, $u_n \leq \sqrt{2n+1}$

c. Déterminer un équivalent de u_n

11.25 Equivalent d'une suite définie par une intégrale : On considère, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} R_n$ où $\lim R_n = 0$.

b. En déduire la limite et un équivalent de I_n .

♥ **11.26 Déterminer la limite de u_n**

On pourra utiliser des équivalents ou des relations de comparaison.

a. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

b. $u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}$

c. $u_n = \left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}\right)^n$

d. $u_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{2^n + n \sin(n)}$

e. $u_n = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$

f. $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

g. $u_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n}\right)$

h. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{n+1} u_n$

Problèmes

Problème 1: Lemme de Cesàro, et applications

1. Etant donné une suite $(u_n)_{n \geq 1}$, on définit $(v_n)_{n \geq 1}$ en prenant pour v_n la moyenne arithmétique des n

premiers termes de u , soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$

a. Dans cette question, on suppose que u converge vers 0.

Montrer que: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k| + \frac{\varepsilon}{2}$.

En déduire que v converge aussi vers 0.

b. Que se passe-t-il pour la suite v si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$?

On pourra considérer $w_n = u_n - \ell$

♦ c. On suppose que $u_n \rightarrow +\infty$. Montrer que : $\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, v_n \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N u_k + \frac{n-N}{n} A$

En déduire que $v_n \rightarrow +\infty$. A-t-on le même résultat si $u_n \rightarrow -\infty$?

d. Enoncer une proposition résumant les questions précédentes.

e. Montrer que l'on peut trouver un exemple où u est divergente et v convergente.

2. Etudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}$

3. Soit (u_n) une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$.

a. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers ℓ .

b. En déduire un équivalent de u_n .

c. Soit (w_n) définie par : $w_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + \frac{1}{w_n}$

- Etudier la monotonie de (w_n) et sa limite éventuelle.
- Montrer que la suite $(w_{n+1}^2 - w_n^2)$ est convergente et déterminer sa limite.
- Déterminer un équivalent simple de w_n .

Problème 2 : Deux suites implicites

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on considère l'équation $(E_n) : x = \ln x + n$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, E_n admet deux solutions sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite du problème, on note x_n la plus petite et y_n la plus grande de ces deux solutions.

2.a. Etudier le sens de variation de (x_n) puis montrer que $x_n \rightarrow 0$

2.b. Justifier que $x_n \sim e^{-n}$

2.c. On pose $u_n = x_n - e^{-n}$. Montrer que $u_n \sim e^{-2n}$.

2.d. En déduire que $x_n = e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})$

3.a. Justifier que $y_n \rightarrow +\infty$

3.b. Justifier que $y_n \sim n$

3.c. Montrer que $y_n = n + \ln(n) + o(\ln(n))$

Problème 3 : Une suite complexe

On définit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \notin \mathbb{R}$

b. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists ! r_n \in]0, +\infty[$, $\exists ! \theta_n \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$

c. Ecrire des relations de récurrence pour les suites réelles $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis donner leurs expressions en fonction de r_0 , θ_0 et n .

d. Démontrer que la suite (r_n) converge.

Ind: $\sin(2a) = \dots$ donc $\cos(a) = \dots$

e. Quelle est la nature de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Donner sa limite si $z_0 = 1 + i$

