Programme de colles-semaine 13-12/01 au 16/01

I. Suites numériques :

• Généralités : def et exemples de mode de génération : suite explicite, suite récurrente, sommes, produits, suite définie par une intégrale, suite implicite.
• Ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, opérations algébriques.
• Propriétés globales : suite majorée, bornée, constante, monotone, stationnaire.
• Suite convergente,: def, suites de référence, propriétés dont unicité de la limite.
• Limite infinie: def, suites de référence, propriétés.
• Opérations sur les limites, suites extraites, limite et ordre dont le passage à la limite dans une inégalité et le théorème des gendarmes.
• Théorèmes de convergence: théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes.
• Suite récurrente linéaire d'ordre 1, d'ordre 2.
• Relations de domination et de prépondérance, définition, caractérisation à l'aide du quotient, propriétés et compatibilité avec les opérations, résultat usuels de croissance comparée.
• Suites équivalentes, def et caractérisations $(u_n - v_n) = o(v_n)$ et $u_n/v_n \to 1$), la relation ~ est une relation d'équivalence, lien avec la convergence, compatibilité avec les opérations, équivalent obtenu à l'aide d'un taux d'accroissement, équivalents usuels.

I. Limites et continuité d'une fonction numérique :
• Propriété vraie au voisinage de a.
• Limite d'une fonction définie sur I en a$\in$I ou borne de I: écritures des 9 cas avec les quantificateurs
• Unicité de la limite, si f admet une limite finie en a alors f bornée au vois de a, si f admet une limite $\ell > 0$ alors f $f > 0$ au vois de a.
• Caractérisation séquentielle de la limite.
• Limite à droite et à gauche de a, limite en a pour f définie sur I\{a}.
• Continuité en a, prolongement par continuité en a.
• Opérations sur les limites.
• Limites et ordre: Passage à la limite dans les inégalités, théorème des gendarmes, théorème de comparaison, théorème de la limite monotone pour les fonctions.

Déroulement de la colle:

① Deux résultat du formulaire 2 ci-joint, sans justification.

② Donner la définition d'une limite de fonctions dans un des 9 cas possibles et illustrer par un schéma.

② Une question de cours parmi les suivantes

- Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1 ou d'ordre 2
- Enoncer les équivalents usuels pour les suites
- Enoncer la caractérisation séquentielle de la limite et proposer une application

③ Exercice(s) aux choix du colleur sur les suites et l'existence et le calcul d'une limite de fonction.

note aux colleurs : Pas de relation de comparaison pour les fonctions pour l'instant.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Formulaire 2

31. Une primitive de $f : x \mapsto x^{\alpha}$ est $F : x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel, $\alpha \neq 1$

32. Une primitive de $f : x \mapsto \ln(x)$ est $F : x \mapsto x\ln(x) - x$

33. Une primitive de $f : x \mapsto e^{\alpha x}$ est $F : x \mapsto \dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ avec α complexe, $\alpha \neq 0$

34. Une primitive de $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ est $F : x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$ avec a réel, $a \neq 0$

Une primitive de $f : x \mapsto \sin(ax+b)$ est $F : x \mapsto -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$ avec a réel, $a \neq 0$

35. Une primitive de $f : x \mapsto \tan(x)$ est $F : x \mapsto -\ln|\cos(x)|$

36. Soit a > 0, une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ sur [-a, a] est $F : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$

37. Soit a > 0, une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ sur [-a, a] est $F : x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$

38. Une primitive de $f'f^{\alpha}$ est $\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel, $\alpha \neq 1$

39. Une primitive de $\dfrac{f'}{f}$ est $\ln|f|$ si f ne s'annule pas sur I

40. Si f est continue sur un intervalle I alors f admet des primitives sur I.
Une primitive de f sur I s'écrit, $\forall x \in I$, $F(x) = \int^{x} f(t)dt$

41. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors, la formule d'intégration par parties donne
$\forall x \in I$, $\int^{x} f'(t)g(t)dt \underset{\text{IPP}}{=} \left[f(t)g(t)\right]^{x} - \int^{x} f(t)g'(t)dt$

42. Soit $I = \int_{b}^{a} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Le changement de variable t = φ(x) avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ entre a et b donne $I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$ *A savoir retrouver en posant t = φ(x).*

43. Soit a une fonction continue sur un intervalle I. Les solutions de y' + a(x)y = 0 sur I sont les fonctions $f_{\lambda} : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ avec $A(x) = \int^{x} a(t)dt$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

44. Soit a, b et c trois constantes réelles, et l'EDL: ay'' + by' + cy = 0
On note (EC) l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.

- Si (EC) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors $S = \left\{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$
- Si (EC) admet une racine double r_0 alors $S = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$
- Si (EC) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ alors
$S = \left\{x \mapsto e^{\alpha x}\left(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\right), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

45. $\forall x \in [-1, 1]$ cos(arccos(x) = x et cos(arcsin(x)) = $\sqrt{1 - x^2}$
sin(arcsin(x)) = x et sin(arccos(x)) = $\sqrt{1 - x^2}$

46. $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x$ et $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$

47. arccos et arcsin sont dérivables sur]-1,1[avec

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

48. $\forall x \in [-1, 1]$, arccos(x) + arcin(x) = $\frac{\pi}{2}$

49. arctan est dérivable sur IR et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

50. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$

51. Soit une suite u telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
On note (EC) l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.
① Si (EC) admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
② Si (EC) admet une racine double (r_0) alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$
② Si (EC) admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ alors
$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = r^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))$

52. Comparaison des suites de limite $+\infty$:

$$(\ln(n))^\alpha \ll n^\beta \ll n^\gamma \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n \text{ avec } 0 < \alpha < \beta < \gamma \text{ et } 1 < a < b$$

53. Comparaison des suites de limite nulle:

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{a^n} \ll \frac{1}{n^\beta} \ll \frac{1}{(\ln(n))^\alpha}$$

54. Equivalents usuels : Si $u_n \to 0$ alors

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ — *α est ici une constante*

$\sin(u_n) \sim u_n$	$\tan(u_n) \sim u_n$	$1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$	
$\ln(1 + u_n) \sim u_n$	$\exp(u_n) - 1 \sim u_n$	$\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$	$\mathrm{th}(u_n) \sim u_n$
$\arctan(u_n) \sim u_n$	$\arcsin(u_n) \sim u_n$		