

Programme de colles-semaine 12-05/01 au 09/01

Suites numériques :

- Généralités : def et exemples de mode de génération : suite explicite, suite récurrente, sommes, produits, suite définie par une intégrale, suite implicite.
 - Ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, opérations algébriques.
 - Propriétés globales : suite majorée, bornée, constante, monotone, stationnaire.
 - Suite convergente,; def, suites de référence, propriétés dont unicité de la limite.
 - Limite infinie: def, suites de référence, propriétés.
 - Opérations sur les limites, suites extraites, limite et ordre dont le passage à la limite dans une inégalité et le théorème des gendarmes.
 - Théorèmes de convergence: théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes.
 - Suite récurrente linéaire d'ordre 1, d'ordre 2.
 - Relations de domination et de prépondérance, définition, caractérisation à l'aide du quotient, propriétés et compatibilité avec les opérations, résultat usuels de croissance comparée.
 - Suites équivalentes, def et caractérisations ($u_n - v_n = o(v_n)$ et $u_n/v_n \rightarrow 1$), la relation $\sim$ est une relation d'équivalence, lien avec la convergence, compatibilité avec les opérations, équivalents obtenu à l'aide d'un taux d'accroissement, équivalents usuels.
-

Déroulement de la colle:

① Deux résultat du formulaire 2 ci-joint, sans justification.

② Une question de cours parmi les suivantes

- Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1 ou d'ordre 2
- Donner la définition et les caractérisations des relations de comparaison
- Donner les équivalents usuels pour les suites (il faut pouvoir justifier)

③ Exercice(s) sur les suites au choix du colleur.

note aux colleurs : Nous n'avons fait très peu d'exercices sur l'utilisation des relations de comparaison donc privilégier la première partie du chapitre dont l'utilisation de la définition de la convergence.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Formulaire 2

31. Une primitive de $f: x \mapsto x^\alpha$ est $F: x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel, $\alpha \neq -1$

32. Une primitive de $f: x \mapsto \ln(x)$ est $F: x \mapsto x \ln(x) - x$

33. Une primitive de $f: x \mapsto e^{\alpha x}$ est $F: x \mapsto \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ avec α complexe, $\alpha \neq 0$

34. Une primitive de $f: x \mapsto \cos(ax+b)$ est $F: x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax+b)$ avec a réel, $a \neq 0$

Une primitive de $f: x \mapsto \sin(ax+b)$ est $F: x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$ avec a réel, $a \neq 0$

35. Une primitive de $f: x \mapsto \tan(x)$ est $F: x \mapsto -\ln|\cos(x)|$

36. Soit $a > 0$, une primitive de $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ sur $[-a, a]$ est $F: x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

37. Soit $a > 0$, une primitive de $f: x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ sur $[-a, a]$ est $F: x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

38. Une primitive de $f' f^\alpha$ est $\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel, $\alpha \neq -1$

39. Une primitive de $\frac{f'}{f}$ est $\ln|f|$ si f ne s'annule pas sur I

40. Si f est continue sur un intervalle I alors f admet des primitives sur I .

Une primitive de f sur I s'écrit, $\forall x \in I$, $F(x) = \int^x f(t) dt$

41. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , alors, la formule d'intégration par parties donne

$$\forall x \in I, \int^x f'(t)g(t)dt \underset{\text{IPP}}{=} [f(t)g(t)]^x - \int^x f(t)g'(t)dt$$

42. Soit $I = \int_b^a f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Le changement de variable $t = \varphi(x)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ entre a et b

donne $I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$ *A savoir retrouver en posant $t = \varphi(x)$.*

43. Soit a une fonction continue sur un intervalle I . Les solutions de $y' + a(x)y = 0$ sur I sont les fonctions $f_\lambda: x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ avec $A(x) = \int^x a(t)dt$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

44. Soit a, b et c trois constantes réelles, et l'EDL: $ay'' + by' + cy = 0$

On note (EC) l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.

• Si (EC) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors $S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

• Si (EC) admet une racine double r_0 alors $S = \left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

• Si (EC) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ alors

$$S = \left\{ x \mapsto e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

45. $\forall x \in [-1, 1]$ $\cos(\arccos(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$$\sin(\arcsin(x)) = x \text{ et } \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

46. $\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x$ et $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$

47. arccos et arcsin sont dérivables sur $] -1, 1[$ avec

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

48. $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

49. arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

50. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

51. Soit une suite u telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

On note (EC) l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.

① Si (EC) admet deux racines réelles r_1 et r_2 , alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

② Si (EC) admet une racine double (r_0) alors $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)r_0^n$

③ Si (EC) admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ alors

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$

52. Comparaison des suites de limite $+\infty$:

$$(\ln(n))^\alpha \ll n^\beta \ll n^\gamma \ll a^n \ll b^n \ll n! \ll n^n \text{ avec } 0 < \alpha < \beta < \gamma \text{ et } 1 < a < b$$

53. Comparaison des suites de limite nulle:

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{a^n} \ll \frac{1}{n^\beta} \ll \frac{1}{(\ln(n))^\alpha}$$

54. Equivalents usuels : Si $u_n \rightarrow 0$ alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$

α est ici une constante

$$\sin(u_n) \sim u_n \quad \tan(u_n) \sim u_n \quad 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$$

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n \quad \exp(u_n) - 1 \sim u_n \quad \operatorname{sh}(u_n) \sim u_n \quad \operatorname{th}(u_n) \sim u_n$$

$$\arctan(u_n) \sim u_n \quad \arcsin(u_n) \sim u_n$$