Chapitre 13: Matrices et systèmes linéaires- poly de cours 1

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

1. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

1.1 Définition et vocabulaire

Déf: On appelle matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille de $\mathbb{K}$ indexée par $\Omega = [\![1, n]\!]\times[\![1, p]\!]$. On note $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$ et on représente A sous forme de tableau.

$$\begin{array}{cc} \text{colonne } j & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \downarrow & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & a_{i,j} & & \leftarrow \\ a_{n,1} & & \cdots & & a_{n,p} \end{pmatrix} & \text{ligne } i \end{array}$$

Proposition 13.1: Deux matrices sont égales ssi elles ont même taille et mêmes coefficients.

Notation: L'ensemble des matrices nxp à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Vocabulaire:
- ★ La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, on la note $0_{n,p}$.
- ★ Si n = 1 alors A est une matrice ligne et si p = 1 alors A est une matrice colonne
- ★ Si n = p alors A est une matrice carrée d'ordre n. Leur ensemble est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ★ On note $L_i(A) = (a_{i,1},\dots,a_{i,p})$ la ième ligne de A et $C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ la jème colonne de A.

✍ Exemples :

1.2 Combinaisons linéaires de matrices

Def: Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$, deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

- On définit une loi interne d'addition en posant $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$
- On définit une loi de produit externe en posant $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$

Proposition 13.2: Soit $A, B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, on a les règles de calcul suivantes :

① Propriétés de l'addition
- $(A+ B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A$
- $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$ où $-A = (-a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$
- $A + B = B + A$

② Propriétés de la multiplication par un scalaire
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $1_{\mathbb{K}}.A = A$

★ Remarque : On verra ultérieurement que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des deux opérations précédentes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

✍ Exemples de calculs:

★ Notation: Soit i et j deux entiers naturels. Le symbole de Kronecker δ_{ij} est un entier qui vaut 1 si i = j et 0 sinon

Def: On appelle matrice élémentaire et on note $E_{i,j}$ la matrice $(\delta_{k,i}\times\delta_{l,j})_{(k,l)\in\Omega}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

C'est à dire la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne i et à la colonne j

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & \text{colonne } j & & & \\ & \downarrow & & & \end{array} \\ E_{i,j} = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } i \end{array}$$

Proposition 13.3 : Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, A s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices $(E_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$: $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}E_{i,j}$

★ Remarque: On verra ultérieurement que les matrices élémentaires forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

✍ Exemple de décomposition dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$:

1.3 Produit de deux matrices

Def : Soit n, p, $m\in\mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (bij)\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$.

On définit la matrice $AB\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{i,j})$ avec

Pour tout $(i, j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;m]\!]$, $\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{1i}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,j} & \cdots & b_{k,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,m} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{i,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,m} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice : On considère les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $L = (1,0,-2)$

Recenser et calculer tous les produits possibles de deux matrices.

★ **Attention : Le produit matriciel a des propriétés différentes du produit de deux réels :**

• Le produit AB n'est pas toujours défini : il existe à condition que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Même si BA est aussi défini, on n'a pas AB = BA

• Ce n'est pas une loi interne excepté dans le cas particulier des matrices carrées.

• Il existe A et B non nulles telles que AB = 0 on dit que le produit matriciel n'est pas une loi intègre. En conséquence, si AB = AC on ne peut pas en déduire que B = C.

Dans la pratique : Pour calculer C = AB on multiplie les lignes de A par les colonnes de B.

• $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $c_{ij} = L_i(A).C_j(B)$

• $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $L_i(AB) = L_i(A).B$

• $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $C_j(AB) = A.C_j(B)$

Proposition 13.4: Soit $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne.
Le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

✍ Preuve :

Proposition 13.5 Multiplication à droite et à gauche par $E_{i,j}$.
• $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall E_{i,j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A.E_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la jème colonne qui contient la ième colonne de A.
• $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $E_{i,j}.A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la ième ligne qui contient la jème ligne de A.
• Lorsque le produit est bien défini, $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$

✍ Preuve :

Proposition 13.6: Propriétés du produit matriciel.

① $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\forall C\in\mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K})$, $A(BC) = (AB)C$

② $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B,C\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, $A(B + C) = AB + AC$

③ $\forall A,B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall C\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, $(A + B)C = AC + BC$

④ $\forall \lambda\in\mathbb{K}$, $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

⑤ $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n.A = A.I_p = A$ où $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est la matrice identité.

✍ Preuves de ① et ⑤ :

1.4 OEL et OEC

Def : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

① On appelle opérations élémentaires sur les lignes (OEL) de A, les opérations suivantes
- La permutation notée $\mathbf{L_i \leftrightarrow L_j}$ est l'échange des lignes i et j.
- La dilation notée $\mathbf{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la multiplication de la ligne L_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $\mathbf{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est l'ajout à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j

① On appelle opérations élémentaires sur les colonnes (OEC) de A, les opérations suivantes
- La permutation notée $\mathbf{C_i \leftrightarrow C_j}$ est l'échange des colonnes i et j.
- La dilatation notée $\mathbf{C_i \leftarrow \lambda C_i}$ est la multiplication de la colonne C_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $\mathbf{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}$ est l'ajout à la colonne C_i d'une dilatation de la colonne C_j

✍ Exercice: Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'en appliquant des OEL et des OEC sur M, on peut obtenir la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Def : Soit λ un scalaire non nul, on définit les matrices carrées suivantes :
- Les matrices de permutation : $P_{i,j}$ obtenue en appliquant $L_i \leftrightarrow L_j$ à I_n.

$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$
- les matrices de dilatations : $D_{i\lambda}$ obtenue en appliquant $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à I_n.

$D_{i\lambda} = I_n + (\lambda-1)E_{i,i}$
- Les matrices de transvections $T_{ij\lambda}$ obtenue en appliquant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n.

$T_{ij\lambda} = I_n + \lambda E_{ij}$

Pour obtenir les matrices correspondant à une OEC, on applique cette OEC à I_p

✍ Exemples en dimension 3

Proposition 13.7 : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

① L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $P_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $D_{\lambda,i}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'opération $L_i \leftarrow Li + \lambda Lj$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $T_{i,j,\lambda}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

② L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ correspond à multiplier à droite par la matrice $P_{i,j}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ correspond à multiplier à droite par la matrice $D_{\lambda,i}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ correspond à multiplier à droite par la matrice $T_{i,j,\lambda}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

1.5 Transposition

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})$.

La transposée de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $A^T = (a_{j,i})$

★ Dans la pratique: les lignes de A sont les colonnes de A^T et inversement.

Proposition 13.8 Propriétés de la transposition

① La transposition est linéaire c'est à dire, $\forall A,B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha.A + \beta.B)^T = \alpha.A^T + \beta.B^T$

② $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^T)^T = A$

③ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$

✍ Preuves :