

## Chapitre 12- Limites et continuité d'une fonction numérique-résumé.

Dans tout ce chapitre  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux réels.

$\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  désigne les fonctions définies sur  $I$  à valeurs réelles.

$a$  désigne un réel de  $I$  ou une borne de  $I$ , éventuellement  $+\infty$  ou  $-\infty$ , et  $\ell$  est un élément de  $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .

### 0. Notion de voisinage

**Def :** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $a$  un réel de  $I$  ou une borne de  $I$  et  $\mathcal{P}$  une propriété portant sur  $f$ .

- On dit que  $\mathcal{P}$  est vraie au voisinage de  $a$  lorsque il existe un réel  $h > 0$  tel que  $\mathcal{P}$  est vraie sur  $]a - h, a + h[ \cap I$ .
- On dit que  $\mathcal{P}$  est vraie au voisinage de  $+\infty$  lorsque il existe un réel  $A$  tel que  $\mathcal{P}$  est vraie sur  $]A, +\infty[ \cap I$ .
- On dit que  $\mathcal{P}$  est vraie au voisinage de  $-\infty$  lorsque il existe un réel  $A$  tel que  $\mathcal{P}$  est vraie sur  $] -\infty, A[ \cap I$ .

★ Exemples:

- On dit que  $M = f(a)$  est un maximum (resp. minimum) local de  $f$  si  $f(a)$  est le maximum (resp. minimum) de  $f$  au voisinage de  $a$  c'est-à-dire  $\exists h > 0, \forall x \in ]a - h, a + h[ \cap I, f(x) \leq f(a)$
- $f$  est positive au voisinage de 1 signifie :  $\exists h > 0, \forall x \in ]1 - h, 1 + h[ \cap I, f(x) \geq 0$

## 1. Limites d'une fonction numérique, continuité en un point.

### 1.1 Définitions et propriétés immédiates:

**Déf:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ , avec  $a \in I$  ou bien  $a$  est borne de  $I$  et  $\ell$  un réel.

① Cas où  $a = +\infty$ .

- On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad (*)$$

ou encore  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in [x_0, +\infty[ \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$

- On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A \quad (*)$$

ou encore  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in [x_0, +\infty[ \Rightarrow f(x) \in [A, +\infty[$

- On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A$$

ou encore  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in [x_0, +\infty[ \Rightarrow f(x) \in ]-\infty, A]$

② Cas où  $a = -\infty$

- On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ou encore  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in ]-\infty, x_0] \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$

- On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A \quad (*)$$

ou encore  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in ]-\infty, x_0] \Rightarrow f(x) \in [A, +\infty[$

- On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A$$

ou encore  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \in ]-\infty, x_0] \Rightarrow f(x) \in ]-\infty, A]$

③ Cas où  $a \in \mathbb{R}$ 

• On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad (*)$$

ou encore  $\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, x \in [a - h, a + h] \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$

• On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow f(x) \geq A \quad (*)$$

ou encore  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, x \in [a - h, a + h] \Rightarrow f(x) \in [A, +\infty[$

• On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow f(x) \leq A$$

ou encore  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, x \in [a - h, a + h] \Rightarrow f(x) \in ]-\infty, A]$

**Proposition 12.1 :** Si  $f$  admet une limite en  $a$  selon l'une des définitions précédentes alors cette limite est unique et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  ou  $f(x) \rightarrow \ell$  ou encore  $\lim_f a = \ell$

Interprétation graphique :

★ Lorsque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , la droite  $y = \ell$  est asymptote horizontale à la courbe représentative de  $f$ .

★ Lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  avec  $a$  réel, la droite  $x = a$  est asymptote verticale à la courbe représentative de  $f$ .

★ Lorsque  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ , la courbe représentative de  $f$  possède une branche infinie dont il faut étudier la nature (revoir le chapitre 3).

**Proposition 12.2 :** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $a$  un réel de  $I$  ou une borne de  $I$ ,  $\ell$  un réel évent.  $\pm\infty$ .

① Si  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \ell) = 0$

② Si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \ell$

③ Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  avec  $\ell$  réel, alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

④ Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|$

⑤ Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  avec  $\ell > 0$  ou  $\ell = +\infty$ , alors  $f$  est strictement positive au voisinage de  $a$

**1.2 Caractérisation séquentielle de la limite**

**Théorème 12.1 :** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $a$  un réel de  $I$  ou une borne de  $I$  et  $\ell$  un réel évent.  $\pm\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall u \in \mathbb{I}^{\mathbb{N}}, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell)$$

Dans la pratique:

★ Si  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$  alors, pour toute suite  $(u_n)$  à valeurs dans  $I$ ,  $\lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell$

Par exemple, si  $u_n \rightarrow -\infty$  alors  $\exp(u_n) \rightarrow 0$

★ Pour montrer qu'une fonction  $f$  définie sur  $I$  n'a pas de limite en  $a$ , il suffit de: trouver deux suites  $u$  et  $v$  à valeurs dans  $I$  telles que  $\lim u_n = \lim v_n = a$  et  $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ .

☞ Application classique : Montrer que la fonction  $\sin$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

### 1.3 Limite à droite et limite à gauche

**Def:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $a$  un réel de  $I$  ou une borne de  $I$ ,  $\ell$  un réel évent.  $\pm\infty$ .

①  $f$  a pour limite  $\ell$  à droite de  $a$  lorsque la restriction de  $f$  à  $I \cap ]a, +\infty[$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$

Pour  $\ell \in \mathbb{R}$ :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, x \in ]a; a + \alpha[ \Rightarrow f(x) \in ]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$

②  $f$  a pour limite  $\ell$  à gauche de  $a$  lorsque la restriction de  $f$  à  $I \cap ]-\infty; a[$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$ .

Pour  $\ell \in \mathbb{R}$ :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, x \in ]a - \alpha; a[ \Rightarrow f(x) \in ]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$

**Notations:**  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{a^+} f = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{a^-} f = \ell$

**Remarque:** Si  $a$  est une borne de  $I$ , par exemple  $a = \inf(I)$ , alors la notion de limite en  $a$  se confond avec la notion de limite à droite de  $a$  et on peut noter  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ou lieu de  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

**Proposition 12.3:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $a$  un réel de  $I$  mais pas une borne de  $I$ ,  $\ell$  un réel évent.  $\pm\infty$ .

Si  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$  alors  $f$  admet  $\ell$  comme limite à droite et à gauche de  $a$

ou encore:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ .

Attention: La réciproque est fautive. *Faire un dessin*

**Def:** Soit  $f$  est définie sur  $I \setminus \{a\}$ , si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$  alors on dit que  $f$  admet  $\ell$  comme limite

en  $a$  et on note  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

### 1.4 Continuité en a réel

**Théorème 12.2 et définition:** Soit  $f$  définie sur  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ .

Si  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$  alors  $\ell = f(a)$  et dans ce cas on dit que  $f$  est continue en  $a$ .

**Remarque:** On a les caractérisations suivantes

★  $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

★  $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

★  $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow (\forall u \in \mathbb{I}^n, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = f(a))$ .

**Def:** Soit  $f$  définie sur  $I$  et  $a$  un réel de  $I$

① Si  $a \neq \sup(I)$ , on dit que  $f$  est continue à droite de  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

② Si  $a \neq \inf(I)$ , on dit que  $f$  est continue à gauche de  $a$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

**Remarque:** Si  $a$  n'est pas une borne de  $I$ ,  $f$  est continue en  $a$  ssi  $f$  est continue à gauche et à droite de  $a$ .

### 1.5 Prolongement par continuité en a.

**Def:** Soit  $f$  définie sur  $I \setminus \{a\}$ . Si  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$ , alors on peut prolonger  $f$  par continuité sur

$I$  en posant  $\tilde{f}: x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{sinon} \end{cases}$ . La fonction  $\tilde{f}$  est continue en  $a$ .

**Remarques:**

★  $f$  définie sur  $I \setminus \{a\}$  admet une limite finie en  $a$  ssi  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$ .

★ Si un tel prolongement existe, il est unique

## 2. Outil de calcul des limites d'une fonction

### 2.1 Opérations sur les limites

**Proposition 12.4:** Soit  $f$  et  $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  a un réel de  $I$  ou une borne de  $I$ .  
Si  $g$  est bornée au voisinage de  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0$

**Proposition 12.5** Soit  $f$  et  $g$  des fonctions définies sur  $I$ ,  $a$  un réel de  $I$  ou une borne de  $I$ ,  $\ell$  et  $\ell' \in \mathbb{R}$ .

① Somme

$\lim_a f$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_a g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a (f + g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

② Produit

$\lim_a f$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_a g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a (f \times g)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

③ Quotient

$\lim_a f$	$\ell$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0
$\lim_a g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	0
$\lim_a (f / g)$	$\ell / \ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_a f$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a g$	$\ell' > 0$ ou $0^+$	$\ell' < 0$ ou $0^-$	$\ell' > 0$ ou $0^+$	$\ell' < 0$ ou $0^-$	$\pm\infty$
$\lim_a (f / g)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Preuve : La caractérisation séquentielle de la limite permet de déduire ces propriétés de celles des limites de suites.

Attention: Ce tableau traduit des implications: Si  $\lim f = \ell$  et  $\lim g = \ell'$  alors  $\lim(f + g) = \ell + \ell'$

**Proposition 12.6:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$  avec  $f(I) \subset J$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$

### 2.2 Limites et ordre:

**Proposition 12.7:** Soit  $f$  et  $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  admettant toutes les deux une limite finie en  $a \in I$  ou borne de  $I$ .

Si  $f \leq g$  ( $\clubsuit$ ) au voisinage de  $a$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Attention : On dit qu'on passe à la limite dans ( $\clubsuit$ ). Ceci n'est possible qu'après avoir établi l'existence des deux limites. Une inégalité stricte ( $f < g$ ) devient large par passage à la limite.

**Théorème des gendarmes pour les fonctions:** Soit  $f, g$  et  $h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $a \in I$  ou borne de  $I$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Si  $g \leq f \leq h$  au voisinage de  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

**Corollaire:** Soit  $f$  et  $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $a \in I$  ou borne de  $I$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Si  $|f(x) - \ell| \leq g(x)$  au voisinage de  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

**Théorème de comparaison pour les fonctions:** Soit  $f$  et  $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $a \in I$  ou borne de  $I$ .

① Si  $f \leq g$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

② Si  $f \leq g$  au voisinage de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

### 2.3 Limites des fonctions monotones sur un intervalle.

**Théorème de la limite monotone pour les fonctions:** Soit  $f$  une fonction définie et croissante sur un intervalle ouvert  $I = ]a, b[$  avec  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  et  $\ell$  un réel.

① Si  $f$  est majorée, alors  $f$  admet une limite finie en  $b$  :  $\lim_{x \rightarrow b} f = \sup_I f$

Sinon,  $\lim_{x \rightarrow b} f = +\infty$

② Si  $f$  est minorée, alors  $f$  admet une limite finie en  $a$  :  $\lim_{x \rightarrow a} f = \inf_I f$

Sinon,  $\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty$

**Remarque :** Cette proposition s'adapte au cas où  $f$  est décroissante sur  $]a, b[$ .

**Conséquence:** Si  $f$  est croissante sur  $]a, b[$  et si  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \ell$  alors  $\forall x \in ]a, b[, f(x) \leq \ell$

**Corollaire:** Si  $f$  est une fonction croissante sur  $I = ]a, b[$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , alors  $f$  admet en tout point  $x_0$  de  $]a, b[$  une limite à droite et à gauche en  $x_0$  vérifiant:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

★ **Remarque :** Cette proposition s'adapte au cas où  $f$  est décroissante sur  $]a, b[$ .

## 3. Continuité sur un intervalle

### 3.1 Définition

**Def:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .  $f$  est continue sur  $I$  lorsque  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

ou encore  $\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

**Notations:** On note  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  ou  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ .

**Exemples:**  $x \mapsto |x|$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $x \mapsto x^n$ ,  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \cos x$ ,  $x \mapsto e^x$  sont continues sur leur ensemble de définition

**Contre-exemple :** la fonction partie entière est continue sur tout intervalle  $]n, n + 1[$  où  $n \in \mathbb{Z}$ .

Elle est en revanche discontinue en tout point  $n$  de  $\mathbb{Z}$ .

**Remarque:** Si  $f$  est continue sur  $I$  alors, pour tout intervalle  $J$  inclus dans  $I$ , la restriction de  $f$  à  $J$  est encore continue.

### 3.2 Opérations sur les fonctions continues

**Proposition 12.8:** Soit  $f$  et  $g$  continue sur  $I$ .

① Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$  alors  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha f + \beta g)$  est continue sur  $I$ .

② Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$  alors  $(f \times g)$  est continue sur  $I$ .

③ Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$  et si  $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ , alors  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (f/g)$  est continue sur  $I$ .

Conséquences:

- ★ Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$  comme combinaison linéaire des fonctions puissances entières.
- ★ Les fonctions rationnelles et la fonction tan sont continues comme quotient de fonctions continues sur tout intervalle où elles sont définies.

**Proposition 12.9:** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$  avec  $f(I) \subset J$ . Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $g$  est continue sur  $J$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

Conséquences:

- ★  $\text{ch}$ ,  $\text{sh}$  sont continues sur leur ensemble de définition.
- ★ Si  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $|f|$  est continue sur  $I$ .

**3.3 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle.****a) Le théorème des valeurs intermédiaires**

**Propriété de Cauchy:** Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ . S'il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que  $f(a)f(b) \leq 0$  alors  $f$  s'annule au moins une fois sur  $I$  cad  $\exists c \in I, f(c) = 0$

**Théorème des valeurs intermédiaire:** Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $a, b \in I$ .

Pour tout réel  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe  $c \in I$  tel que  $f(c) = \lambda$  ou encore  $f(x) = \lambda$  admet au moins une solution sur  $I$ .

*$f$  prend donc toutes les valeurs intermédiaires entre  $f(a)$  et  $f(b)$*

**Corollaire:** Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  alors  $f(I)$  est un intervalle.

Remarque: Le TVI est un théorème d'existence et ne permet pas de déterminer les valeurs des antécédent de  $\lambda$  par  $f$ .

Applications classiques:

- Tout polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré impair s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .
- Si  $f$  est continue sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors  $f$  garde un signe constant sur  $I$ .
- Si  $f$  est continue sur  $I = [a, b]$  avec  $I$  stable par  $f$  alors  $f$  admet un point fixe (12.16)

**b) Fonction continue sur un segment:**

**Théorème des bornes atteintes:** Si  $f$  est continue sur  $I = [a, b]$ , alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes, ou encore :

$\min_I f$  et  $\max_I f$  existe et il existe  $c$  et  $d$  dans  $I$  tels que  $\min_I f = f(c)$  et  $\max_I f = f(d)$

Conséquence: On a  $f([a, b]) = [m, M]$  donc l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

**c) Bijection continue**

**Théorème de la bijection continue:** Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$  alors

- $J = f(I)$  est un intervalle.
- $f$  réalise une bijection de  $I$  dans  $J$
- $f^{-1}$  est continue sur  $J$ , strictement monotone sur  $J$ , de même monotonie que  $f$

Rappel: La représentation graphique de  $f^{-1}$  est l'image de celle de  $f$  par la symétrie d'axe  $y = x$

Applications:  $\ln$  (et par composition  $x \mapsto x^\alpha, x \mapsto a^x$ ),  $\arcsin$ ,  $\arccos$  et  $\arctan$  sont continues sur les intervalles où elles sont définies.

#### 4. Extension rapide aux fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe,  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ ,  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$  ou borne de  $I$  et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

$|\cdot|$  désigne le module.

**Déf:** On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$  lorsque  $\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Conséquence : Si  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a$  alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

**Proposition 12.10:**  $f$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$  ssi  $\operatorname{Re}(f)$  admet pour limite  $\operatorname{Re}(\ell)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  admet pour limite  $\operatorname{Im}(\ell)$  en  $a$ .

Conséquences: Tous les résultats sur les limites vus dans ce chapitre restent valables sauf les résultats concernant l'ordre.

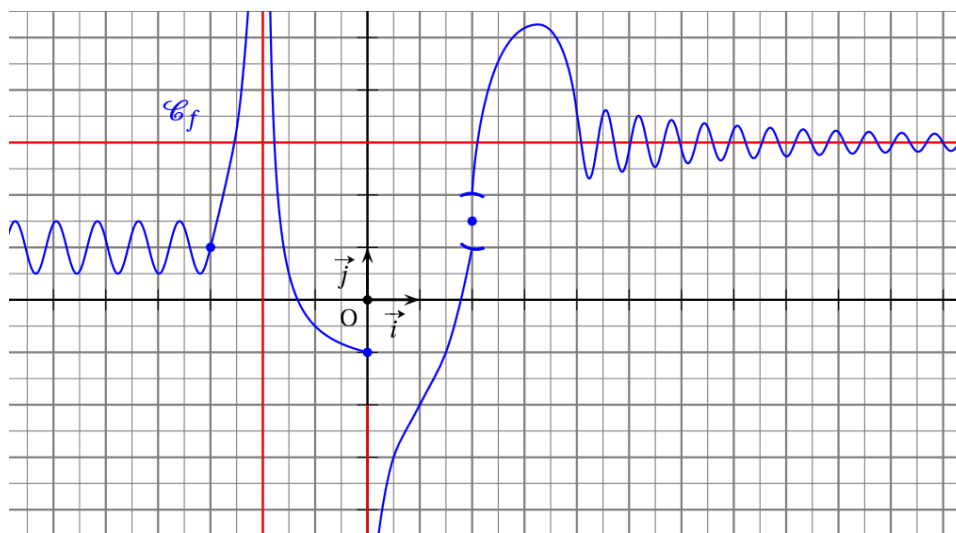
**Def:** Soit  $a \in I$ ,  $f$  est continue en  $a$  lorsque  $f$  admet une limite en  $a$  nécessairement égale à  $f(a)$ .

On dit que  $f$  est continue sur  $I$  lorsque  $f$  est continue en tout point de  $I$ .

**Proposition 12.11:**  $f$  est continue en  $a$  ssi  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont continues en  $a$ .

★ Conséquence: la somme, le produit par un scalaire, le produit, le quotient et la composée (si ils existent) de deux fonctions continues est continue.

**Annexe 1** : On donne, ci-dessous, l'allure de  $\mathcal{C}_f$  courbe représentative d'une fonction  $f$  :



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction  $f$  ?
2. Déterminer, si elles existent, les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
3. Sur quels intervalles, la fonction  $f$  est-elle continue ?

**Annexe 2 : Démonstration du théorème des bornes atteintes - HP**

On note  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

**Préliminaire:** Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ , on pose  $M = \sup(A)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(M - \frac{1}{n+1})$  ne majore pas  $A$  donc  $\exists a_n \in A$ ,  $M - \frac{1}{n+1} < a_n < M$ .

Il existe donc une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $A$  qui converge vers  $M = \sup(A)$ .

**Démonstration du théorème:**

On pose  $J = f([a, b])$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

On pose  $M$  la borne supérieure de  $J$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  et  $m$  sa borne inférieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

On va montrer que  $M$  et  $m$  sont deux réels de  $J$

• Montrons que  $J$  est majoré:

Par l'absurde, on suppose que  $J = f(I) = \{f(x), x \in I\}$  n'est pas majoré.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $E_n = \{x \in I, f(x) \geq n\}$  est non vide et minoré (car  $E_n \subset I$ ). D'après le résultat préliminaire il existe une suite  $(x_{n,p})$  d'éléments de  $E_n$  telle que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_{n,p} = x_n$ .

De plus, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, E_n \subset I = [a, b]$ . On a donc :  $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, x_{n,p} \in I = [a, b]$ .

Donc, en passant à la limite quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I = [a, b]$ .

Or par hypothèse, la fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f$  est continue en  $x_n$ . On a donc :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} f(x_{n,p}) = f(x_n)$ .

De plus, on a :  $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, x_{n,p} \in E_n$ . Ainsi, on a :  $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, f(x_{n,p}) \geq n$

Donc, en passant à la limite quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \geq n$ .

Par comparaison, on obtient:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$  (♦)

On remarque que :  $\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} \subset E_n$  donc on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \inf E_{n+1} \geq \inf E_n$ .

C'est-à-dire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \geq x_n$  et la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Or on a vu que :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [a, b]$ . Donc la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par  $b$  donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

On a :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I = [a, b]$  donc  $\ell \in [a, b]$  et ainsi,  $f$  est continue en  $\ell$ .

On a alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell) \in \mathbb{R}$ . Ce qui contredit (♦) (OUF!)

Bilan: L'ensemble  $J$  est majoré et donc  $M = \sup J \in \mathbb{R}$ .

De même, on montre que l'ensemble  $J$  est minoré et donc que  $m = \inf J \in \mathbb{R}$ .

• Montrons que:  $M \in J$ :

Le résultat préliminaire assure l'existence d'une suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < \alpha_n \leq M$ .

Comme  $J = f(I)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \beta_n \in I$ ,  $\alpha_n = f(\beta_n)$  et on a  $\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < f(\beta_n) \leq M$ .

Ainsi, l'ensemble  $F_n = \{x \in I, M - \frac{1}{n+1} < f(x) \leq M\}$  est non vide et minoré (car  $F_n \subset I$  et  $I$  est minoré)

donc  $F_n$  admet une borne inférieure et pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $x_n = \inf F_n$ .

Comme dans le point précédent, on montre que :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et convergente vers un réel  $\ell \in I = [a, b]$ .

Comme,  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in F_n$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leq M$

En passant à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M$

Or la fonction  $f$  étant continue en  $\ell'$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell') \in \mathbb{R}$ .

Par unicité de la limite, on a donc :  $M = f(\ell') \in J = f(I)$  CQFD !

De même, on montre que :  $m \in J$ .

### Annexe 3 : Démonstration du théorème de la bijection continue.

• Le théorème des valeurs intermédiaires assure que  $f(I)$  est un intervalle.

• Par construction, la fonction  $\tilde{f} : I \rightarrow J = f(I)$  est surjective.

De plus, comme  $f$  est strictement monotone, la fonction  $\tilde{f}$  est injective de  $I$  dans  $J$ .

On a donc que  $\tilde{f}$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$  et on peut définir sa bijection réciproque  $\tilde{f}^{-1} : J \rightarrow I$ . Dans la suite de la démonstration, on confond  $f$  et  $\tilde{f}$ .

• Quitte à considérer  $-f$ , on peut supposer que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Montrons que :  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $J$ .

Soit  $(y, y') \in J^2$  tel que  $y < y'$  ( $\heartsuit$ ). On pose :  $x = f^{-1}(y)$  et  $x' = f^{-1}(y')$ .

Si  $x \geq x'$ , comme  $f$  est strictement croissante sur  $I$ , on a :  $f(x) \geq f(x')$ , c'est-à-dire  $y \geq y'$ , ce qui est contraire à ( $\heartsuit$ ), donc, nécessairement, on a :  $x < x'$ , c'est-à-dire :  $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$  et ainsi  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $J$ .

Montrons que :  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ .

Soit  $b \in J = f(I)$ . Montrons que  $f^{-1}$  est continue en  $b$  c'est-à-dire que  $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose :  $a = f^{-1}(b)$ . On se place dans le cas où  $a$  n'est pas une borne de  $I$ , les autres cas se traitent de façon similaire.

On peut alors choisir  $\varepsilon$  assez petit pour avoir  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \subset I$ . *faire un dessin.*

On cherche à montrer qu'il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall y \in J \cap ]b - \eta, b + \eta[ \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon.$$

Comme  $f$  est croissante sur  $I$ , on a :

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon \Leftrightarrow f^{-1}(b) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(b) + \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < f^{-1}(y) < a + \varepsilon \Leftrightarrow f(a - \varepsilon) < y < f(a + \varepsilon) (\spadesuit)$$

On cherche donc à montrer qu'il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall y \in J, y \in ]b - \eta, b + \eta[ \Rightarrow f(a - \varepsilon) < y < f(a + \varepsilon).$$

On a :  $a - \varepsilon < a$  et  $f$  est strictement croissante sur  $I$ , donc on a :  $f(a - \varepsilon) < f(a) = b$   
d'où :  $\exists \eta_1 > 0, b - \eta_1 = f(a - \varepsilon)$ .

On a :  $a < a + \varepsilon$  et  $f$  est strictement croissante sur  $I$ , donc on a :  $f(a) = b < f(a + \varepsilon)$   
d'où :  $\exists \eta_2 > 0, b + \eta_2 = f(a + \varepsilon)$ .

On pose :  $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ . On a :  $f(a - \varepsilon) = b - \eta_1 \leq b - \eta < b < b + \eta \leq b + \eta_2 = f(a + \varepsilon)$ .

On a donc :  $[b - \eta, b + \eta] \subset [f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon)] \subset f(I)$  (car  $f(I)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ).

C'est-à-dire que pour tout  $y$  de  $f(I)$ , on a :  $y \in [b - \eta, b + \eta] \Rightarrow y \in [f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon)]$

En utilisant ( $\spadesuit$ ), on a donc :  $\exists \eta > 0, \forall y \in f(I), y \in [b - \eta, b + \eta] \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| \leq \varepsilon$

On a donc :  $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$  et  $f^{-1}$  est continue en  $b$ . (C'EST GAGNE !)

**CC1:  $f^{-1}$  est continue sur l'intervalle  $J$ .**