Chapitre 13: Matrices et systèmes linéaires- résumé de cours

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

1. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

1.1 Définition et vocabulaire

Déf: On appelle matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille de $\mathbb{K}$ indexée par $\Omega = [\![1, n]\!]\times[\![1, p]\!]$. On note $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$ et on représente A sous forme de tableau.

$$\begin{array}{cc} \text{colonne } j & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \downarrow & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & a_{i,j} & & \leftarrow \\ a_{n,1} & & \cdots & & a_{n,p} \end{pmatrix} & \text{ligne } i \end{array}$$

Proposition 13.1: Deux matrices sont égales ssi elles ont même taille et mêmes coefficients.

Notation: L'ensemble des matrices nxp à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Vocabulaire:
★ La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, on la note $0_{n,p}$.
★ Si n = 1 alors A est une matrice ligne et si p = 1 alors A est une matrice colonne
★ Si n = p alors A est une matrice carrée d'ordre n. Leur ensemble est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
★ On note $L_i(A) = (a_{i,1},\dots,a_{i,p})$ la ième ligne de A et $C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ la jème colonne de A.

1.2 Combinaisons linéaires de matrices

Def: Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$, deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
- On définit une loi interne d'addition en posant $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$
- On définit une loi de produit externe en posant $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$

Proposition 13.2: Soit $A, B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, on a les règles de calcul suivantes :

① Propriétés de l'addition
- $(A+ B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A$
- $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$ où $-A = (-a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$
- $A + B = B + A$

② Propriétés de la multiplication par un scalaire
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $1_{\mathbb{K}}.A = A$

★ Remarque : On verra ultérieurement que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des deux opérations précédentes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

★ Notation: Soit i et j deux entiers naturels. Le symbole de Kronecker δ_{ij} est un entier qui vaut 1 si i = j et 0 sinon

Def: On appelle matrice élémentaire et on note $E_{i,j}$ la matrice $(\delta_{k,i}\times\delta_{l,j})_{(k,l)\in\Omega}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

C'est à dire la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne i et à la colonne j

$$\begin{array}{cc} & \text{colonne } j \\ & \downarrow \\ E_{i,j} = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } i \end{array}$$

Proposition 13.3 : Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, A s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices $(E_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$: $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}E_{i,j}$

★ Remarque: On verra ultérieurement que les matrices élémentaires forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

1.3 Produit de deux matrices

Def : Soit n, p, $m\in\mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (bij)\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$.

On définit la matrice $AB\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{i,j})$ avec

Pour tout $(i, j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;m]\!]$, $\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{1i}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,j} & \cdots & b_{k,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,m} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{i,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,m} \end{pmatrix} \end{array}$$

★ **Attention : Le produit matriciel a des propriétés différentes du produit de deux réels :**

• Le produit AB n'est pas toujours défini : il existe à condition que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Même si BA est aussi défini, on n'a pas AB = BA

• Ce n'est pas une loi interne excepté dans le cas particulier des matrices carrées.

• Il existe A et B non nulles telles que AB = 0 on dit que le produit matriciel n'est pas une loi intègre. En conséquence, si AB = AC on ne peut pas en déduire que B = C.

Dans la pratique : Pour calculer C = AB on multiplie les lignes de A par les colonnes de B.

• $\forall i\in[\![1, n]\!]$, $\forall j\in[\![1, m]\!]$, $c_{ij} = L_i(A).C_j(B)$

• $\forall i\in[\![1, n]\!]$, $L_i(AB) = L_i(A).B$ et $\forall j\in[\![1, m]\!]$, $C_j(AB) = A.C_j(B)$

Proposition 13.4: Soit $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne.
Le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Proposition 13.5 Multiplication à droite et à gauche par $E_{i,j}$.
- $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall E_{i,j}\in\mathcal{M}_{p}(\mathbb{K})$, $A.E_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la jème colonne qui contient la ième colonne de A.
- $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p,}(\mathbb{K})$, $\forall E_{i,j}\in\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$, $E_{i,j}.A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la ième ligne qui contient la jème ligne de A.
- Lorsque le produit est bien défini, $E_{i,j}\times E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$

Proposition 13.6: Propriétés du produit matriciel.

① $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\forall C\in\mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K})$, $A(BC) = (AB)C$

② $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B,C\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, $A(B + C) = AB + AC$

③ $\forall A,B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall C\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, $(A + B)C = AC + BC$

④ $\forall \lambda\in\mathbb{K}$, $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

⑤ $\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n.A = A.I_p = A$ où $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est la matrice identité.

1.4 OEL et OEC

Def : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

① On appelle opérations élémentaires sur les lignes (OEL) de A, les opérations suivantes
- La permutation notée $\mathbf{L_i\leftrightarrow L_j}$ est l'échange des lignes i et j.
- La dilation notée $\mathbf{L_i\leftarrow \lambda L_i}$ est la multiplication de la ligne L_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $\mathbf{L_i\leftarrow Li+\lambda Lj}$ est l'ajout à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j

① On appelle opérations élémentaires sur les colonnes (OEC) de A, les opérations suivantes
- La permutation notée $\boldsymbol{C_i\leftrightarrow C_j}$ est l'échange des colonnes i et j.
- La dilatation notée $\boldsymbol{C_i\leftarrow \lambda C_i}$ est la multiplication de la colonne C_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $\boldsymbol{C_i\leftarrow Ci+\lambda Cj}$ est l'ajout à la colonne C_i d'une dilatation de la colonne C_j

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-3L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_2\leftarrow C_2+C_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3\leftarrow C_3-C_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def : Soit λ un scalaire non nul, on définit les matrices carrées suivantes :
- Les matrices de permutation : $P_{i,j}$ obtenue en appliquant $L_i\leftrightarrow L_j$ à I_n.

$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$
- les matrices de dilatations : $D_{i\lambda}$ obtenue en appliquant $L_i\leftarrow \lambda L_i$ à I_n.

$D_{i\lambda} = I_n + (\lambda-1)E_{i,i}$
- Les matrices de transvections $T_{ij\lambda}$ obtenue en appliquant $L_i\leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n.

$T_{ij\lambda} = I_n + \lambda E_{ij}$

Pour obtenir les matrices correspondant à une OEC, on applique cette OEC à I_p

Proposition 13.7 : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

① L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $P_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $D_{\lambda,i}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'opération $L_i \leftarrow Li + \lambda Lj$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $T_{i,j,\lambda}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

② L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ correspond à multiplier à droite par la matrice $P_{i,j}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ correspond à multiplier à droite par la matrice $D_{\lambda,i}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ correspond à multiplier à droite par la matrice $T_{i,j,\lambda}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

1.5 Transposition

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})$.

La transposée de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $A^T = (a_{j,i})$

★ Dans la pratique: les lignes de A sont les colonnes de A^T et inversement.

Proposition 13.8 Propriétés de la transposition

① La transposition est linéaire c'est à dire, $\forall A,B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha.A + \beta.B)^T = \alpha.A^T + \beta.B^T$

② $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^T)^T = A$

③ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$

---

2. Systèmes linéaires

2.1. Rappel : Résolution en petite dimension, algorithme du pivot de Gauss :

Cf

2.2 Généralités et écriture matricielle :

Def: Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un ensemble de conditions de la forme :

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$ où $(a_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le p} \in \mathbb{K}^{np}$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$

★ Ecriture matricielle d'un système linéaire :.

• On pose : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$. A est la matrice des coefficients du système (S)

• On pose les matrices colonnes: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. L'écriture matricielle de (S) est $\boxed{AX = B}$

• B est le 2nd membre de (S). Lorsque B = 0 on dit que le système est homogène.

• On note (H) le système homogène associé à (S) obtenu en remplaçant le second membre 0.

• On dit que le système (S) est <u>compatible</u> s'il admet au moins une solution. Sinon, le système est dit <u>incompatible</u>. On peut observer qu'un système homogène est toujours compatible, car il admet au moins une solution : X = 0

Proposition 13.9: Soit (S) un système linéaire d'écriture matricielle AX = B
① Le système est compatible si et seulement si B est une combinaison linéaire des colonnes de A.
② Si (S) est compatible alors les solutions de (S) s'obtiennent en faisant la somme d'une solution particulière de (S) et des solutions du système linéaire homogène associé (H).

2.3. Opérations élémentaires sur les lignes (O.E.L.), algorithme du pivot de Gauss

Def : Soit (S) un système de n équations ou lignes notées $L_1, L_2, .., L_3$. On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S), l'une des transformations suivantes
• La permutation notée $\mathbf{L_i \leftrightarrow L_j}$ est l'échange des lignes i et j.
• La dilation notée $\mathbf{L_i \leftarrow \lambda L_i}$ est la multiplication de la ligne L_i par le scalaire λ non nul.
• La transvection notée $\mathbf{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$ est l'ajout à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j

Proposition 13.10: Si on applique à un système (S) une OEL alors on obtient un système (S') équivalent à (S), c'est à dire ayant les mêmes solutions.

Preuve : Les OEL son réversibles

★ Remarque : Les opérations type $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ avec $\lambda \neq 0$ donnent aussi un système équivalent.

Def : Une matrice M à n lignes et p colonnes est dite échelonnée en ligne lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées.
• Si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes le sont.
• Pour une ligne non nulle, le premier coefficient non nul est situé à droite de celui de la ligne précédente. C'est à dire que pour i ≥ 2 la ligne i commence par au moins (i - 1) zéros

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Def : Soit (S) un système de n équations à p inconnues.
• Un système est échelonné si sa matrice est échelonnée en ligne
• Pour un système, échelonné, on appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne.
• Le nombre de pivots est le rang du système

Def : Soit (S) un système échelonné de rang r.
• Les équations $L_1, L_2, ..., L_r$ sont les équations principales de (S)
• Les équations $L_{r+1}, ..., L_n$ sont les conditions de compatibilité
• Les r inconnues associées à chaque pivot sont les inconnues principales, les (p - r) autres sont les inconnues secondaires qui seront prises comme paramètres pour exprimer les éventuelles solutions du système

Exemple : $\left\{\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} x-3y+z=1 \\ -2y=0 \end{array}\right\} \text{équations principales} \\ \left.\begin{array}{r} 0=0 \\ 0=m \end{array}\right\} \text{relations de compatibilité} \end{array}\right.$

Le système est de rang 2, x et y sont les 2 inconnues principales et z l'inconnue secondaire

Proposition 13.11 : Soit (S) un système à n équations et p inconnues, échelonné et de rang r.
- (S) est compatible si et seulement si les (n - r) relations de compatibilité sont vraies.
- Si (S) est compatible avec r = p alors (S) admet une unique solution qu'on obtient en « remontant » le système.
- Si (S) est compatible avec r < p alors (S) admet une infinité de solutions qui s'expriment à l'aide de (r-p) paramètres

Proposition 13.12 : Tout système est équivalent à un système échelonné obtenu par une succession d'OEL sur ce système.

Preuve: L'algorithme du Pivot de Gauss permet de passer de (S) à un système échelonné en selon le principe général suivant :
A l'étape i :
- On choisit un pivot, on le remonte à la ligne i en effectuant une permutation ;
- (On réduit le pivot à 1 en effectuant une dilatation)
- On place des 0 sous le pivot en utilisant des transvections.

On s'arrête lorsque le système est échelonné puis on résout ce système en remontant es équations principales.

Démonstration par récurrence sur n en annexe.

★ Remarques : Au lieu d'effectuer des OEL sur un système (S), on peut les effectuer sur sa matrice augmentée : (A|B) = $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$

Corollaire 1: Toute matrice donne une matrice échelonnée après une succession d'OEL.

Corollaire 2: Un système de n équations à p inconnues peut avoir
- Une unique solution
- Pas de solution.
- Une infinité de solutions

3. Les matrices carrées

3.1 Calculs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Def: Une matrice $n\times n$ est appelée matrice carrée d'ordre n.
L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

D'après le paragraphe précédent :
- Toute combinaison linéaire de matrices carrées est carrée.
- Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n, les produits matriciels AB et BA existent et donne une matrice carrée d'ordre n.
- La transposée d'une matrice carrée est carrée.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est stable pour les opérations usuelles sur les matrices}}$

- Le produit matriciel n'est pas commutatif donc, en général on a $AB \neq BA$.

Lorsque $AB = BA$, on dit que A et B commutent
- Pour toute matrice carrée A, $AI_n = I_nA = A$

Def : On peut définir des puissances entières dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante :

$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^0 = I_n$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $A^{k+1} = A^k.A = A.A^k$

★Remarque : Il existe des matrices non nulles ayant une puissance entière nulle, par exemple
$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Def : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est nilpotente signifie qu'il existe un entier p tel que $A^p = 0_n$

Si, de plus, $A^{p-1} \neq 0_n$, on dira que A est nilpotente d'ordre p. Dans ce cas, $\forall k \geq p$, on a $A^k = 0_n$

Proposition 13.13 : Si A et B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors on peut appliquer les formules du binôme de Newtonn et de Bernoulli.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B^kA^{p-k}$ et $A^p - B^p = (A - B)\sum_{k=0}^{p-1}A^kB^{p-1-k}$

★Dans la pratique : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p\in\mathbb{N}$.

- Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, A et λI_n commutent donc $\left(A+\lambda I_n\right)^p=\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}A^k\left(\lambda I_n\right)^{p-k}=\sum_{k=0}^{n}\lambda^{p-k}\binom{p}{k}A^k$.
- $I_n - A^p = I_n^p - A^p = \left(I_n - A\right)\sum_{k=0}^{p-1}A^k$ si A est nilpotente d'ordre p alors $I_n = \left(I_n - A\right)\sum_{k=0}^{p-1}A^k$

3.2 Ensembles de matrices carrées particulières

a) Matrices diagonales

Def: Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $A = (a_{i,j})$ est diagonale ssi ($i\neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$)
- Si A est diagonale et si $\forall i\in[\![1, n]\!]$, $a_{ii} = \lambda\in\mathbb{R}$, $A = \lambda I_n$ est dite scalaire.

Exemple: $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

★ Notation: $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.

Proposition 13.14 :

① $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.

② $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable pour le produit matriciel et $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\times\mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1,\ldots,\lambda_n\mu_n)$

③ $\forall p\in\mathbb{N}$, $(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p)$

b) Matrices triangulaires

Def: Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $A = (a_{i,j})$ est **triangulaire supérieure** lorsque tous ses coefficients situés sous sa diagonale sont nuls c'est à dire que $(i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$.
- $A = (a_{i,j})$ est **triangulaire inférieure** lorsque tous ses coefficients situés au-dessus de sa diagonale sont nuls c'est à dire que $(i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$.

Exemples: $T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

★ Notations: On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Toute matrice diagonale est triangulaire.

Proposition 13.15 :

① $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) est stable par combinaison linéaire.

② $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) est stable par pour le produit matriciel

Dans les deux cas la diagonale de TT' est $(t_{11}t'_{11}, \ldots, t_{nn}t'_{nn})$.

c) Matrices symétriques et antisymétriques

Def: Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- A est symétrique lorsque $A^T = A$ c'est à dire que $\forall(i, j)\in[\![1, n]\!]^2$, $a_{j,i} = a_{i,j}$
- A est antisymétrique lorsque $A^T = -A$ c'est à dire que $\forall(i, j)\in[\![1;n]\!]^2$, $a_{j,i} = -a_{i,j}$

★ Remarques:
Une matrice antisymétrique est nécessairement de diagonale nulle.
Toute matrice diagonale est symétrique.

★ Notation: On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensembles des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques. Ces ensembles sont stables par combinaison linéaire mais pas pour le produit matriciel.

---

4. Matrices carrées inversibles

4.1 Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$

Def: Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible lorsque il existe $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, B est unique, est appelé inverse de A et notée A^{-1}.

★ Attention : 0_n n'est évidemment pas inversible mais il existe des matrices non nulles non inversibles.

★ Remarque : Si une matrice A est inversible alors

$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C$

On peut donc "simplifier par A" l'égalité AB = AC en multipliant à gauche par A^{-1}

Proposition 13.16

① I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

② Les matrices d'OEL (resp. OEC) sont inversibles
$(P_{i,j})^{-1} = P_{i,j}$ $(D_{i,\lambda})^{-1} = D_{i,1/\lambda}$ $(T_{i,j,\lambda})^{-1} = T_{i,j,-\lambda}$

③ Toute matrice ayant une ligne ou une colonne nulle n'est pas inversible.

④ Une matrice diagonale est inversible ssi tous ses éléments diagonaux sont non nuls.
Si $D = \text{diag}(d_1,...d_n)$ avec $\forall i\in[\![1, n]\!]$ $d_i \neq 0$ alors $D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1},...,d_n^{-1})$.

Proposition 13.17: **Compatibilité avec les opérations matricielles**:
Soit $A, B\in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}^*$.

① $I_n\in GL_n(\mathbb{K})$

$AB\in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$

$GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif appelé groupe linéaire d'ordre n

② $\forall n\in\mathbb{N}$, A^n est inversible et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

③ λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$

④ A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4.3 Caractérisations des matrices inversibles et calcul pratique de l'inverse :

Proposition 13.18 : Les OEL (resp. les OEC) sur une matrice préservent l'inversibilité
ou encore si A donne B après une succession d'opérations élémentaires sur ses lignes (resp. sur ses colonnes) alors A est inversible si et seulement si B est inversible.

Théorème 13.1: **Caractérisations des matrices inversibles**.
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

① A est inversible

② Pour tout $B\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système AX = B a une unique solution.

③ AX = B a comme unique solution X = 0

④ On peut obtenir I_n à partir de A par une succession d'OEL

✎ Preuve : On montre que ① ⇒ ② puis que ② ⇒ ③ puis que ③ ⇒ ①.

Corollaire : Une matrice triangulaire est inversible si et seulement tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Si c'est le cas alors son inverse est une matrice triangulaire.

★ Dans la pratique :

① Pour étudier l'inversibilité d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on utilise le pivot de Gauss pour l'échelonner. On obtient une matrice T triangulaire.
On a $A \underset{OEL}{\rightarrow} T$ et A est inversible ssi T est inversible ssi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} \neq 0$.

② Méthodes de calcul de l'inverse de A lorsque A est inversible

Méthode 1 : Résolution d'un système linéaire
On résout le système (S) : AX = B où B est quelconque dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Ce système a une unique solution et $X = A^{-1}Y$

Méthode 2 : Utilisation de l'algorithme de pivot de Gauss
On effectue une succession d'OEL pour passer de A à I_n.
Parallèlement, on applique les mêmes OEL sur I_n : on obtient la matrice E produit de toutes les matrices d'OEL utilisées. On a $(A\,|\,I_n) \xrightarrow[OEL]{} (I_n\,|\,E)$ donc $I_n = EA$ et $E = A^{-1}$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On échelonne A en utilisant des OEL selon la méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{c|ccc} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}}^{T} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

On obtient une matrice triangulaire T inversible donc A est inversible.
On continue d'appliquer des OEL pour obtenir I_3 à partir de A et avoir A^{-1} à droite de I_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

On obtient : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Proposition 13.18: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
① Si il existe $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle $BA = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$
② Si il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle $AC = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = C$
On dit aussi que A est inversible à gauche ssi A est inversible à droite ssi A est inversible.

Méthode 3 : L'égalité $BA = I_n$ ou $AB = I_n$ suffit pour affirmer que A est inversible et que $A^{-1} = B$
Par exemple si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^2 = 3A + I_3$ alors $A(A - 3I_3) = I_3$ et on peut en déduire que A est inversible avec $A^{-1} = A - 3I_3$

4.4 Matrices semblables

Def : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables si il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

Proposition 13.19 : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables avec $B = P^{-1}AP$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n et B^n sont semblables avec $B^n = P^{-1}A^nP$

Annexe : Preuve de l'algorithme du pivot de Gauss

On fixe $p\in\mathbb{N}^*$ et on raisonne par récurrence sur n, le nombre d'équations du système.

- Si n = 1 alors (S) est déjà échelonné, il n'y a rien à faire.
- Supposons la propriété vraie pour tout système linéaire à n équations.

On considère un système à (n + 1) équation et p inconnues.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2,}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2,}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2,}x_2 + \cdots + a_{n+1,p}x_p = b_{n+1} \end{cases} \qquad (S)$$

1er cas: Tous les coefficient sont nuls, et alors le système est échelonné et la propriété est donc vraie.

2ème cas : Il existe au moins un coefficient non nul

- Si $a_{1,1}\neq 0$ alors on prend ce coefficient comme pivot et on effectue les transvections $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}L_1$ pour i variant de 2 à (n + 1).

  On obtient le système suivant équivalent à (S) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2,}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \qquad\quad + a'_{2,2,}x_2 + \cdots + a'_{2,p}x_p = b'_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad + a'_{n+1,2,}x_2 + \cdots + a'_{n+1,p}x_p = b'_1 \end{cases}$$

- Si $a_{1,1} = 0$ et si il existe $i_0\in[\![2, n + 1]\!]$ tel que $a_{i0,1} \neq 0$ alors on effectue la permutations $L_1 \leftrightarrow L_{i0}$ et on ramené au cas précédent.

- Si $\forall i\in[\![1,n + 1]\!]$, $a_{i,1} = 0$ alors on fait le même raisonnement avec les coefficients de x_2. On notera que dans ce cas, l'inconnue x_1 n'apparaît pas dans le système.

Dans tous les cas, on a obtenu un système dont toutes les lignes de 2 à (n + 1) commencent par zéro. On considère alors le sous-système formé par les lignes $L_2, L_3,..., L_{n+1}$, c'est un système à n équations, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut échelonner ce système en lui appliquant des OEL ce qui donne un système échelonné équivalent à (S) et ce qui montre que la propriété est vraie au rang (n + 1).

★ Dans la pratique : Soit un système $n\times p$, le procédé décrit dans l'hérédité, permet de choisir un premier pivot, de faire apparaître des zéros sous ce pivot ainsi qu'un sous - système $(n-1)\times(p-1)$ sur lequel on réitère le procédé. L'algorithme s'arrête donc en un nombre fini d'étapes égal à min(n, p)