

Chapitre 13: Matrices et systèmes linéaires- poly de cours 1

Dans tout le chapitre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , n et p deux entiers naturels non nuls.

1. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

1.1 Définition et vocabulaire

Déf: On appelle matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathbb{K} , toute famille de \mathbb{K} indexée par $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. On note $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$ et on représente A sous forme de tableau.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{colonne } j & & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \left(\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & \cdots & & \cdots & & a_{1,p} \\ \vdots & & a_{i,j} & & \leftarrow & \\ a_{n,1} & \cdots & & & & a_{n,p} \end{array} \right) & \text{ligne } i \end{array}$$

Proposition 13.1: Deux matrices sont égales ssi elles ont même taille et mêmes coefficients.

Notation: L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Vocabulaire:

- ★ La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, on la note $O_{n,p}$.
- ★ Si $n = 1$ alors A est une matrice ligne et si $p = 1$ alors A est une matrice colonne
- ★ Si $n = p$ alors A est une matrice carrée d'ordre n . Leur ensemble est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★ On note $L_i(A) = (a_{i,1}, \dots, a_{i,p})$ la i ème ligne de A et $C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ la j ème colonne de A .

Exemples :

1.2 Combinaisons linéaires de matrices

Def: Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$, deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On définit une loi interne d'addition en posant $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$
- On définit une loi de produit externe en posant $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$

Proposition 13.2: Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a les règles de calcul suivantes :

① Propriétés de l'addition

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A$
- $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$ où $-A = (-a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$
- $A + B = B + A$

② Propriétés de la multiplication par un scalaire

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- $1_{\mathbb{K}} \cdot A = A$

★ Remarque : On verra ultérieurement que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des deux opérations précédentes est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

✎ Exemples de calculs:

★ Notation: Soit i et j deux entiers naturels. Le symbole de Kronecker δ_{ij} est un entier qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon

Def: On appelle matrice élémentaire et on note $E_{i,j}$ la matrice $(\delta_{k,i} \times \delta_{l,j})_{(k,l) \in \Omega}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

C'est à dire la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne i et à la colonne j

$$E_{i,j} = \begin{matrix} & \text{colonne } j \\ & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{ligne } i \end{matrix}$$

Proposition 13.3 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, A s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des

$$\text{matrices } (E_{i,j})_{(i,j) \in \Omega} : A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_{i,j}$$

★ Remarque: On verra ultérieurement que les matrices élémentaires forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

☞ Exemple de décomposition dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$:

1.3 Produit de deux matrices

Def : Soit $n, p, m \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$.

On définit la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{i,j})$ avec

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,j} & \cdots & b_{k,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & c_{i,j} & \cdots & c_{i,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,m} \end{pmatrix}$$

Exercice : On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } L = (1, 0, -2)$$

Recenser et calculer tous les produits possibles de deux matrices.

★ **Attention : Le produit matriciel a des propriétés différentes du produit de deux réels :**

- Le produit AB n'est pas toujours défini : il existe à condition que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B . Même si BA est aussi défini, on n'a pas $AB = BA$
- Ce n'est pas une loi interne excepté dans le cas particulier des matrices carrées.
- Il existe A et B non nulles telles que $AB = 0$ on dit que le produit matriciel n'est pas une loi intègre. En conséquence, si $AB = AC$ on ne peut pas en déduire que $B = C$.

Dans la pratique : Pour calculer $C = AB$ on multiplie les lignes de A par les colonnes de B .

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, c_{ij} = L_i(A) \cdot C_j(B)$
- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(AB) = L_i(A) \cdot B$
- $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, C_j(AB) = A \cdot C_j(B)$

Proposition 13.4: Soit $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne.

Le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .

Preuve :

Proposition 13.5 Multiplication à droite et à gauche par $E_{i,j}$.

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall E_{i,j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), A \cdot E_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j ème colonne qui contient la i ème colonne de A .
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), E_{i,j} \cdot A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la i ème ligne qui contient la j ème ligne de A .
- Lorsque le produit est bien défini, $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$

Preuve :

Proposition 13.6: Propriétés du produit matriciel.

$$\textcircled{1} \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K}), \quad A(BC) = (AB)C$$

$$\textcircled{2} \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}), \quad A(B + C) = AB + AC$$

$$\textcircled{3} \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}), \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$\textcircled{4} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}), \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$\textcircled{5} \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), I_n \cdot A = A \cdot I_p = A \text{ où } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ est la matrice identité.}$$

Preuves de $\textcircled{1}$ et $\textcircled{5}$:

1.4 OEL et OEC


Def : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

① On appelle opérations élémentaires sur les lignes (OEL) de A , les opérations suivantes

- La permutation notée $L_i \leftrightarrow L_j$ est l'échange des lignes i et j .
- La dilatation notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est la multiplication de la ligne L_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est l'ajout à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j

② On appelle opérations élémentaires sur les colonnes (OEC) de A , les opérations suivantes

- La permutation notée $C_i \leftrightarrow C_j$ est l'échange des colonnes i et j .
- La dilatation notée $C_i \leftarrow \lambda C_i$ est la multiplication de la colonne C_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ est l'ajout à la colonne C_i d'une dilatation de la colonne C_j

 **Exercice:** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'en appliquant des OEL et des OEC sur M , on

peut obtenir la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Def : Soit λ un scalaire non nul, on définit les matrices carrées suivantes :

- Les matrices de permutation : $P_{i,j}$ obtenue en appliquant $L_i \leftrightarrow L_j$ à I_n .

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$$

- les matrices de dilatations : $D_{i,\lambda}$ obtenue en appliquant $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à I_n .

$$D_{i,\lambda} = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$$

- Les matrices de transvections $T_{ij,\lambda}$ obtenue en appliquant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n .

$$T_{ij,\lambda} = I_n + \lambda E_{ij}$$

Pour obtenir les matrices correspondant à une OEC, on applique cette OEC à I_p

Exemples en dimension 3

Proposition 13.7 : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

① L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $P_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $D_{\lambda,i}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $T_{i,j,\lambda}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

② L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ correspond à multiplier à droite par la matrice $P_{i,j}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ correspond à multiplier à droite par la matrice $D_{\lambda,i}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ correspond à multiplier à droite par la matrice $T_{i,j,\lambda}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

Preuve de ① :

1.5 Transposition

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})$.

La transposée de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $A^T = (a_{j,i})$

★ Dans la pratique: les lignes de A sont les colonnes de A^T et inversement.

Proposition 13.8 Propriétés de la transposition

- ① La transposition est linéaire c'est à dire, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha.A + \beta.B)^T = \alpha.A^T + \beta.B^T$
- ② $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (A^T)^T = A$
- ③ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T A^T$

🔗 Preuves :

2. Systèmes linéaires**2.1. Rappel : Résolution en petite dimension, algorithme du pivot de Gauss :****✎ Exercice 13.6**

2.2 Généralités et écriture matricielle :

Def: Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficients dans \mathbb{K} est un ensemble de conditions de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{où } (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^{np} \text{ et } (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$$

★ Écriture matricielle d'un système linéaire :

• On pose : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$. A est la matrice des coefficients du système (S)

• On pose les matrices colonnes: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. L'écriture matricielle de (S) est $AX = B$

• B est le 2nd membre de (S). Lorsque $B = 0$ on dit que le système est homogène.

• On note (H) le système homogène associé à (S) obtenu en remplaçant le second membre 0.

• On dit que le système (S) est compatible s'il admet au moins une solution. Sinon, le système est dit incompatible. On peut observer qu'un système homogène est toujours compatible, car il admet au moins une solution : $X = 0$

☞ Exemples : Ecrire les systèmes de l'exercice 13.7 sous forme matricielle

Proposition 13.9: Soit (S) un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$

- ① Le système est compatible si et seulement si B est une combinaison linéaire des colonnes de A .
- ② Si (S) est compatible alors les solutions de (S) s'obtiennent en faisant la somme d'une solution particulière de (S) et des solutions du système linéaire homogène associé (H) .

Preuve :

2.3. Opérations élémentaires sur les lignes (O.E.L.), algorithme du pivot de Gauss

Def : Soit (S) un système de n équations ou lignes notées L_1, L_2, \dots, L_n . On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S), l'une des transformations suivantes

- La permutation notée $L_i \leftrightarrow L_j$ est l'échange des lignes i et j.
- La dilation notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est la multiplication de la ligne L_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est l'ajout à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j

Proposition 13.10: Si on applique à un système (S) une OEL alors on obtient un système (S') équivalent à (S), c'est à dire ayant les mêmes solutions.

Preuve : Les OEL son réversibles

★ Remarque : Les opérations type $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ avec $\lambda \neq 0$ donnent aussi un système équivalent.

Def : Une matrice M à n lignes et p colonnes est dite échelonnée en ligne lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées.

- Si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes le sont.
- Pour une ligne non nulle, le premier coefficient non nul est situé à droite de celui de la ligne précédente. C'est à dire que pour $i \geq 2$ la ligne i commence par au moins (i - 1) zéros

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Def : Soit (S) un système de n équations à p inconnues.

- Un système est échelonné si sa matrice est échelonnée en ligne
- Pour un système, échelonné, on appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne.
- Le nombre de pivots est le rang du système

✎ Exercice : Pour chaque système échelonné suivant, donner l'écriture matricielle, encadrer

chaque pivot, préciser le rang puis résoudre le système.

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 1 \\ -y - z = 1 \\ -2z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -3z + t = 2 \\ t = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -2z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Def : Soit (S) un système échelonné de rang r.

- Les équations L_1, L_2, \dots, L_r sont les équations principales de (S)
- Les équations L_{r+1}, \dots, L_n sont les conditions de compatibilité
- Les r inconnues associées à chaque pivot sont les inconnues principales, les (p - r) autres sont les inconnues secondaires qui seront prises comme paramètres pour exprimer les éventuelles solutions du système

Exemple.:
$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + z = 1 \\ -2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{équations principales} \\ \text{relations de compatibilité} \end{array}$$

Le système est de rang 2, x et y sont les 2 inconnues principales et z l'inconnue secondaire

Proposition 13.11 : Soit (S) un système à n équations et p inconnues, échelonné et de rang r.

- (S) est compatible si et seulement si les (n - r) relations de compatibilité sont vraies.
- Si (S) est compatible avec $r = p$ alors (S) admet une unique solution qu'on obtient en « remontant » le système.
- Si (S) est compatible avec $r < p$ alors (S) admet une infinité de solutions qui s'expriment à l'aide de (r-p) paramètres

Exemple : Résoudre le système précédent

Proposition 13.12 : Tout système est équivalent à un système échelonné obtenu par une succession d'OEL sur ce système.

Preuve: L'algorithme du Pivot de Gauss permet de passer de (S) à un système échelonné en selon le principe général suivant :

A l'étape i :

- On choisit un pivot, on le remonte à la ligne i en effectuant une permutation ;
- (On réduit le pivot à 1 en effectuant une dilatation)
- On place des 0 sous le pivot en utilisant des transvections.

On s'arrête lorsque le système est échelonné puis on résout ce système en remontant es équations principales.

Démonstration par récurrence sur n en annexe.

★ Remarques : Au lieu d'effectuer des OEL sur un système (S), on peut les effectuer sur sa

matrice augmentée : $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} & b_n \end{array} \right)$

Corollaire 1: Toute matrice donne une matrice échelonnée après une succession d'OEL.

Corollaire 2: Un système de n équations à p inconnues peut avoir

- Une unique solution
- Pas de solution.
- Une infinité de solutions

Annexe : Preuve de l'algorithme du pivot de Gauss

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on raisonne par récurrence sur n , le nombre d'équations du système.

- Si $n = 1$ alors (S) est déjà échelonné, il n'y a rien à faire.
- Supposons la propriété vraie pour tout système linéaire à n équations.

On considère un système à $(n + 1)$ équation et p inconnues.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n+1,1}x_1 + a_{n+1,2}x_2 + \dots + a_{n+1,p}x_p = b_{n+1} \end{cases} \quad (S)$$

1er cas: Tous les coefficients sont nuls, et alors le système est échelonné et la propriété est donc vraie.

2ème cas : Il existe au moins un coefficient non nul

- Si $a_{1,1} \neq 0$ alors on prend ce coefficient comme pivot et on effectue les transvections

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1 \text{ pour } i \text{ variant de } 2 \text{ à } (n + 1).$$

On obtient le système suivant équivalent à (S) :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \quad + a'_{2,2}x_2 + \dots + a'_{2,p}x_p = b'_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad + a'_{n+1,2}x_2 + \dots + a'_{n+1,p}x_p = b'_i \end{cases}$$

- Si $a_{1,1} = 0$ et si il existe $i_0 \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$ tel que $a_{i_0,1} \neq 0$ alors on effectue la permutation $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$ et on ramène au cas précédent.
- Si $\forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, a_{i,1} = 0$ alors on fait le même raisonnement avec les coefficients de x_2 .
On notera que dans ce cas, l'inconnue x_1 n'apparaît pas dans le système.

Dans tous les cas, on a obtenu un système dont toutes les lignes de 2 à $(n + 1)$ commencent par zéro. On considère alors le sous-système formé par les lignes L_2, L_3, \dots, L_{n+1} , c'est un système à n équations, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut échelonner ce système en lui appliquant des OEL ce qui donne un système échelonné équivalent à (S) et ce qui montre que la propriété est vraie au rang $(n + 1)$.

★ Dans la pratique : Soit un système $n \times p$, le procédé décrit dans l'hérédité, permet de choisir un premier pivot, de faire apparaître des zéros sous ce pivot ainsi qu'un sous-système $(n-1) \times (p-1)$ sur lequel on réitère le procédé. L'algorithme s'arrête donc en un nombre fini d'étapes égal à $\min(n, p)$

3. Les matrices carrées

3.1 Calculs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Def: Une matrice $n \times n$ est appelée matrice carrée d'ordre n .

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

D'après le paragraphe précédent :

- Toute combinaison linéaire de matrices carrées est carrée.
- Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n , les produits matriciels AB et BA existent et donne une matrice carrée d'ordre n .
- La transposée d'une matrice carrée est carrée.

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable pour les opérations usuelles sur les matrices

- Le produit matriciel n'est pas commutatif donc, en général on a $AB \neq BA$.

Lorsque $AB = BA$, on dit que A et B commutent

- Pour toute matrice carrée A , $A I_n = I_n A = A$

Def : On peut définir des puissances entières dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A^0 = I_n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A^k$$

★Remarque : Il existe des matrices non nulles ayant une puissance entière nulle, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est nilpotente signifie qu'il existe un entier p tel que $A^p = 0_n$

Si, de plus, $A^{p-1} \neq 0_n$, on dira que A est nilpotente d'ordre p . Dans ce cas, $\forall k \geq p$, on a $A^k = 0_n$

☞ Exercice résolu : 13.11

Proposition 13.13 : Si A et B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors on peut appliquer les formules du binôme de Newton et de Bernoulli.

$$\forall p \in \mathbb{N}, (A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^k A^{p-k} \text{ et } A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$$

★Dans la pratique : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, A et λI_n commutent donc $(A + \lambda I_n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k (\lambda I_n)^{p-k} = \sum_{k=0}^p \lambda^{p-k} \binom{p}{k} A^k$.

- $I_n - A^p = I_n^p - A^p = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$ si A est nilpotente d'ordre p alors $I_n = (I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$

☞ Exercices résolus : 13.13 et 13.14

3.2 Ensembles de matrices carrées particulières

a) Matrices diagonales

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $A = (a_{i,j})$ est diagonale ssi ($i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$)
- Si A est diagonale et si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ii} = \lambda \in \mathbb{R}$, $A = \lambda I_n$ est dite scalaire.

Exemple: $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

★ **Notation:** $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n .

Proposition 13.14 :

- ① $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.
- ② $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable pour le produit matriciel et $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n)$
- ③ $\forall p \in \mathbb{N}, (\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^p = \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$

✎ **Preuve :**

b) Matrices triangulaires

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $A = (a_{i,j})$ est **triangulaire supérieure** lorsque tous ses coefficients situés sous sa diagonale sont nuls c'est à dire que $(i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$.
- $A = (a_{i,j})$ est **triangulaire inférieure** lorsque tous ses coefficients situés au-dessus de sa diagonale sont nuls c'est à dire que $(i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$.

Exemples: $T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

★ **Notations:** On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Toute matrice diagonale est triangulaire.

Proposition 13.15 :

- ① $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) est stable par combinaison linéaire.
 - ② $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) est stable par produit matriciel
- Dans les deux cas la diagonale de TT' est $(t_{11}t'_{11}, \dots, t_{nn}t'_{nn})$.

✎ **Preuve :**

c) Matrices symétriques et antisymétriques

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- A est symétrique lorsque $A^T = A$ c'est à dire que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{j,i} = a_{i,j}$
- A est antisymétrique lorsque $A^T = -A$ c'est à dire que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{j,i} = -a_{i,j}$

★ Remarques:

Une matrice antisymétrique est nécessairement de diagonale nulle.

Toute matrice diagonale est symétrique.

★ Notation: On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques. Ces ensembles sont stables par combinaison linéaire mais pas pour le produit matriciel.

✎ Exercice résolu :

- Que dire d'une combinaison linéaire de deux matrices symétriques ? antisymétriques ?
- Que dire du produit de deux matrices symétriques, de deux matrices antisymétriques ? D'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique ?
- Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

4. Matrices carrées inversibles

4.1 Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible lorsque il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, B est unique, est appelé inverse de A et notée A^{-1} .

Preuve de l'unicité :

Exercice : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et donner A^{-1}

★ Attention : O_n n'est évidemment pas inversible mais il existe des matrices non nulles non inversibles.

Exercice: Justifier que $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ n'est pas inversible.

★ Remarque : Si une matrice A est inversible alors

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C$$

On peut donc "simplifier par A " l'égalité $AB = AC$ en multipliant à gauche par A^{-1}

Proposition 13.16

① I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

② Les matrices d'OEL (resp. OEC) sont inversibles

$$(P_{i,j})^{-1} = P_{i,j} \quad (D_{i,\lambda})^{-1} = D_{i,1/\lambda} \quad (T_{i,j,\lambda})^{-1} = T_{i,j,-\lambda}$$

③ Toute matrice ayant une ligne ou une colonne nulle n'est pas inversible.

④ Une matrice diagonale est inversible ssi tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

Si $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket d_i \neq 0$ alors $D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1})$.

Preuves :

Proposition 13.17: Compatibilité avec les opérations matricielles:

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

① $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$

$$AB \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } (A^{-1})^{-1} = A$$

$GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif appelé groupe linéaire d'ordre n

② $\forall n \in \mathbb{N}, A^n \text{ est inversible et } (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

③ $\lambda A \text{ est inversible et } (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

④ $A^T \text{ est inversible et } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Preuves :

4.3 Caractérisations des matrices inversibles et calcul pratique de l'inverse :

Proposition 13.18 : Les OEL (resp. les OEC) sur une matrice préservent l'inversibilité ou encore si A donne B après une succession d'opérations élémentaires sur ses lignes (resp. sur ses colonnes) alors A est inversible si et seulement si B est inversible.

Preuve :

Théorème 13.1: Caractérisations des matrices inversibles.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- ① A est inversible
- ② Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ a une unique solution.
- ③ $AX = B$ a comme unique solution $X = 0$
- ④ On peut obtenir I_n à partir de A par une succession d'OEL

Preuve : On montre que ① \Rightarrow ② puis que ② \Rightarrow ③ puis que ③ \Rightarrow ①.

Corollaire : Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Si c'est le cas alors son inverse est une matrice triangulaire.

Preuve:

★ Dans la pratique :

① **Pour étudier l'inversibilité d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$** , on utilise le pivot de Gauss pour l'échelonner. On obtient une matrice T triangulaire.

On a $A \xrightarrow{\text{OEL}} T$ et A est inversible ssi T est inversible ssi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_{i,i} \neq 0$.

② **Méthodes de calcul de l'inverse de A lorsque A est inversible**

Méthode 1 : Résolution d'un système linéaire

On résout le système $(S) : AX = B$ où B est quelconque dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Ce système a une unique solution et $X = A^{-1}B$

Méthode 2 : Utilisation de l'algorithme de pivot de Gauss

On effectue une succession d'OEL pour passer de A à I_n .

Parallèlement, on applique les mêmes OEL sur I_n : on obtient la matrice E produit de toutes les matrices d'OEL utilisées. On a $(A | I_n) \xrightarrow{\text{OEL}} (I_n | E)$ donc $I_n = EA$ et $E = A^{-1}$

Exemple : Inversibilité et inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Proposition 13.18: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

① Si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle $BA = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$

② Si il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle $AC = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = C$

On dit aussi que A est inversible à gauche ssi A est inversible à droite ssi A est inversible.

Preuve

Méthode 3 : L'égalité $BA = I_n$ ou $AB = I_n$ suffit pour affirmer que A est inversible et que $A^{-1} = B$

Exercice résolu : 13.16

4.4 Matrices semblables

Def : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables si il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

Proposition 13.19 : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables avec $B = P^{-1}AP$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n et B^n sont semblables avec $B^n = P^{-1}A^nP$

Exercice résolu : 13.27