

Programme de colles-semaine 15 -26/01 au 30/01

I. Limites et continuité d'une fonction numérique :

- Continuité sur un intervalle, opérations sur les fonctions continues, continuité des fonctions usuelles.
- Propriétés de fonctions continues sur I : Théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de la bijection continue.
- Extension aux fonctions à valeurs dans \mathbb{C} .

II. Matrices et systèmes linéaires

- Ensemble des matrices à lignes et p colonnes et à coefficients dans K , matrice carrée, matrice ligne, matrice colonne, matrice nulle, matrice identité, matrices élémentaires $E_{i,j}$.
- Opérations sur les matrices à n lignes et p colonnes, combinaison linéaire, produit, propriétés.
- Produit à droite et à gauche par les matrices élémentaires $E_{i,j}$. Application à $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$
- Définition des OEL et des OEC, matrices d'OEL et d'OEC, et interprétation en terme de produit matriciel.
- Transposition : définition et propriétés de calcul.
- Système linéaire : Généralités et vocabulaire, interprétation géométrique en dimension 2 et 3, matrice et matrice augmentée d'un système, écriture matricielle d'un système linéaire.
- OEL pour un système, algorithme du pivot de Gauss
- On définit le rang du système comme le nombre de pivot à l'issu de l'échelonnement.

Soit un système de n équations à p inconnues de rang r .

Si $r = p$ alors le système admet une unique solution

Si $r < p$ alors le système a r équations principales et $n - r$ condition de compatibilité et donc il admet une infinité de solutions ou aucune solution.

- Matrices carrées, opérations sur les matrices carrées, puissances entières, formule du binôme et de Bernoulli pour deux matrices qui commutent.
- Matrices carrées particulière : matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques.
- Matrices carrées inversibles : définition, exemples, compatibilité avec les opérations, notation $GL_n(\mathbb{K})$.
- Les OEL et les OEC conservent l'inversibilité.
- $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = B$ a une unique solution

\Leftrightarrow On peut obtenir I_n en appliquant une succession d'OEL à A .

- Calcul pratique de l'inverse : Système, OEL (pivot de Gauss) transformant $(A | I_n)$ en $(I_n | A^{-1})$.
- CNS d'inversibilité pour les matrices triangulaires
- Inversibilité à droite et à gauche : A est inversible ssi A est inversible à gauche ssi A est inversible à droite.

Application au calcul de A^{-1} .

Déroulement de la colle:

① Résolution d'un système linéaire de petite dimension avec ou sans paramètres.

② Une question de cours parmi

- Démonstration de la propriété de Cauchy : Soit f est continue sur un intervalle I , si il existe a et b dans I tels que $f(a)f(b) \leq 0$ alors f s'annule sur I (dichotomie)
- Enoncer le théorème des bornes atteintes et proposer une application
- Donner la définition du produit matriciel et montrer l'associativité.
- Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure

③ Exercice(s) sur les théorèmes de continuité, les systèmes et les calculs de puissances d'une matrice

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10