

## Programme de colles-semaine 15 -26/01 au 30/01

---

### I. Limites et continuité d'une fonction numérique :

- Continuité sur un intervalle, opérations sur les fonctions continues, continuité des fonctions usuelles.
- Propriétés de fonctions continues sur I: Théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de la bijection continue.
- Extension aux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

### II. Matrices et systèmes linéaires

- Ensemble des matrices à lignes et p colonnes et à coefficients dans K, matrice carrée, matrice ligne, matrice colonne, matrice nulle, matrice identité, matrices élémentaire  $E_{i,j}$ .
  - Opérations sur les matrices à n lignes et p colonnes, combinaison linéaire, produit, propriétés.
  - Produit à droite et à gauche par les matrices élémentaires  $E_{i,j}$ . Application à  $E_{i,j} \cdot E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$ .
  - Définition des OEL et des OEC, matrices d'OEL et d'OEC, et interprétation en terme de produit matriciel.
  - Transposition : définition et propriétés de calcul.
  - Système linéaire : Généralités et vocabulaire, interprétation géométrique en dimension 2 et 3, matrice et matrice augmentée d'un système, écriture matricielle d'un système linéaire.
  - OEL pour un système, algorithme du pivot de Gauss
  - On définit le rang du système comme le nombre de pivot à l'issue de l'échelonnement.
- Soit un système de n équations à p inconnues de rang r.
- Si  $r = p$  alors le système admet une unique solution
- Si  $r < p$  alors le système a r équations principales et n - r condition de compatibilité et donc il admet une infinité de solutions ou aucune solution.
- Matrices carrées, opérations sur les matrices carrées, puissances entières, formule du binôme et de Bernoulli pour deux matrices qui commutent.
  - Matrices carrées particulière : matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques.
  - Matrices carrées inversibles : définition, exemples, compatibilité avec les opérations, notation  $GL_n(\mathbb{K})$ .
  - Les OEL et les OEC conservent l'inversibilité.
  - $A \in M_n(\mathbb{K})$  est inversible  $\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = B$  a une unique solution  
 $\Leftrightarrow$  On peut obtenir  $I_n$  en appliquant une succession d'OEL à A.
  - Calcul pratique de l'inverse : Système, OEL (pivot de Gauss) transformant  $(A|I_n)$  en  $(I_n|A^{-1})$ .
  - CNS d'inversibilité pour les matrices triangulaires
  - Inversibilité à droite et à gauche : A est inversible ssi A est inversible à gauche ssi A est inversible à droite. Application au calcul de  $A^{-1}$ .
- 

### Déroulement de la colle:

- ① Résolution d'un système linéaire de petite dimension avec ou sans paramètres.
  - ② Une question de cours parmi
    - Démonstration de la propriété de Cauchy : Soit f est continue sur un intervalle I, si il existe a et b dans I tels que  $f(a)f(b) \leq 0$  alors f s'annule sur I (dichotomie)
    - Enoncer le théorème des bornes atteintes et proposer une application
    - Donner la définition du produit matriciel et montrer l'associativité.
    - Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure
  - ③ Exercice(s) sur les théorèmes de continuité, les systèmes et les calculs de puissances d'une matrice
- 

**Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10**