Chapitre 14 – Espace vectoriel - résumé de cours

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Complément : notion de groupe

Def: Soit E un ensemble, on appelle loi de composition interne sur E toute application de E^2 dans E. Si la loi est notée $\star$, l'application correspondante est $(x, y) \to x \star y$.

Exemples:
- $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $+$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\times$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- La composition, notée $\circ$, dans l'ensemble $\mathcal{F}(E, E) = E^E$.

Contre-exemples:
- $-$ dans $\mathbb{N}$
- La multiplication d'une fonction par un réel.

Def: Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $\star$.
On dit que $(G, \star)$ est un groupe lorsque $\star$ vérifie les propriétés suivantes :
(1) $\star$ est associative
(2) $\star$ admet un élément neutre
(3) Tout élément de G est inversible pour $\star$
Si de plus $\star$ est commutative alors G est un groupe commutatif ou abélien.

Exemples et contre-exemples
- Exemples de groupes additifs: $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{C}, +)$
- Exemples de groupes multiplicatifs: $(\mathbb{R}^*, \times)$ $(\mathbb{C}^*, \times)$
- $(\mathbb{N}, +)$ $(\mathbb{R}, \times)$, $(\mathbb{Z}^*, \times)$ ne sont pas des groupes.
- $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +)$ est un groupe mais pas $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \circ)$
- Les matrices carrées d'ordre n inversible forment un groupe pour le produit matriciel appelé groupe linéaire et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Notations:
Si la loi est notée $+$, l'élément neutre est noté 0_E et le symétrique de x est noté $-x$
Si la loi est notée $\times$, l'élément neutre est noté 1_E et le symétrique de x est noté $1/x$ ou x^{-1}.

2. Notion d'espace vectoriel et exemples de référence:

2.1 Définition et vocabulaire:

Def: Soit E un ensemble muni de deux lois
une loi interne $(x, y) \in E^2 \mapsto x + y \in E$
une loi externe $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda.x \in E$

On dit que $(E,+, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-EV.) si et seulement si
- $(E, +)$ est un groupe abélien
- La loi externe vérifie, $\forall x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $1.x = x$
(ii) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
(iii) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.y$
(iv) $\lambda(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

Vocabulaire: Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-EV.

★ Les éléments de E sont appelé **vecteurs** et peuvent être noté x ou $\vec{x}$, l'élément neutre de E est alors noté 0_E ou $\vec{0}_E$.

★ Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires**.

Proposition 14.1: Règles de calcul dans les $\mathbb{K}$ -EV.

$\forall x\in E,\ 0.x = 0_E$ et $\forall\lambda\in \mathbb{K},\ \lambda.0_E = 0_E$

$\forall x\in E,\ \forall\lambda\in \mathbb{K},\ \lambda.x= \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

$\forall x\in E,\ (-1).x = -x$ opposé de x pour la loi +

$\forall(x, y)\in E^2,\ \forall(\lambda, \mu)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda.(x - y)=\lambda.x - \lambda.y$ et $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$

Def : Soit $(x_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie vecteurs de E et $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie de scalaires, le vecteur $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ est un vecteur de E appelé <u>combinaison linéaire</u> des vecteurs $(x_i)_{1\le i\le n}$

Cas particulier : Deux vecteurs x et y sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.

Notons que 0_E est colinéaire à tous les vecteur de E car $\forall x\in E,\ 0.x = 0_E$

2.2 Exemples de référence:

★ Les ensembles des vecteurs du plan et de l'espace munis de l'addition vectorielle et de la multiplication par un réel sont des $\mathbb{R}$-EV.

★ $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$-EV avec les lois suivantes:

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, le vecteur nul est $(0, 0)$

$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y, z + z'')$ et $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, le vecteur nul est $(0, 0, 0)$

★ $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-E.V.

★ $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-E.V. et un $\mathbb{C}$-EV Remarque: Tout $\mathbb{C}$-E.V. est un $\mathbb{R}$-E.V.

★ Soit X un ensemble non vide, et $\mathbb{K}$ -E un espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$ muni des opérations usuelles sur les applications est un $\mathbb{K}$ -EV.

Pour $X = \mathbb{N}$, et $E =\mathbb{K}$, on obtient que l'ensembles des suites à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$ -EV.

Pour $X = I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $E = \mathbb{K}$, on obtient que les fonctions définies sur I à valeurs dans ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munies des opérations usuelles forment un $\mathbb{K}$ -EV.

★ Les matrices $n\times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ munies de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire forment un $\mathbb{K}$ -EV.

2.3 Espace vectoriel produit:

Proposition 14.2: Soit E et F deux $\mathbb{K}$-E.V., l'ensemble $E\times F = \{(x, y),\ x\in E,\ y\in F\}$ muni des lois:

$\forall x, x'\in E,\ \forall y, y'\in F,\ (x ,y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\forall x\in E,\ \forall y\in F,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel appelé espace vectoriel produit.

Remarque: On retrouve que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-EV mais aussi que $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$-EV.

Extension: Par récurrence immédiate, si $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de $\mathbb{K}$-E.V. alors le produit $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est encore un $\mathbb{K}$-E.V.

C'est donc le cas de $\mathbb{R}^3$ et plus généralement, pour $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}^n$ avec les opérations suivantes :
$(x_1, x_2,\ldots, x_n) + (y_1, y_2,\ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2,\ldots,x_n + y_n)$ et $\lambda(x_1, x_2,\ldots,x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$
Le vecteur nul est $(0, 0, \ldots, 0)$

---

3. Sous-espace vectoriel:

3.1 Définition, caractérisations, exemples:

Def: Soit E un $\mathbb{K}$-E.V. et F une partie de E. F est un sous-espace vectoriel (SEV) de E ssi

- F est non vide
- F est stable par la loi +
- F est stable par la loi .

Dans la pratique, on utilise les caractérisations suivantes:

① F est un S.E.V. de E $\Leftrightarrow 0_E\in F$ et $\forall(x, y)\in F^2$, $\forall(\lambda, \mu)\in\mathbb{K}^2$, $(\lambda.x + \mu.y)\in F$
ou F contient le vecteur nul et est stable par combinaison linéaire.
② F est un S.E.V. de E $\Leftrightarrow 0_E\in F$ et $\forall(x, y)\in F^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $(\lambda.x + y)\in F$

NB: si $0_E\notin F$ alors F n'est pas un SEV.

Exemples:
★ Soit E une $\mathbb{K}$-E.V., les parties $\{ 0_E\}$ et E sont des SEV. de E, dits triviaux.
★ Considérons I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $E = \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$., les ensembles suivants sont des SEV de E :
$\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ ensemble des fonctions continues sur I
$\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ ensemble des fonctions dérivables sur I.
★ $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, contient les S.E.V. suivants :
Ensemble des matrices diagonales : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$
Ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) : $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

✍ ♥ Exercice résolu : *méthode 1*
① Montrer que $F = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x - 3y + z = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$
② Montrer que $G = \{(2t, t, 3t),\ t\in\mathbb{R}\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$
③ Montrer que les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ forment un SEV de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Dans la pratique: Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-EV E, alors F muni des restrictions des lois + et . , est lui-même un $\mathbb{K}$ -EV.

Dans les problèmes, pour montrer qu'un ensemble est un EV. on montrera de préférence qu'il est un S.E.V. d'un espace vectoriel de référence.

3.2 Sous-espace vectoriel engendré par n vecteurs de E

Proposition 14.3 et def: Soit E un $\mathbb{K}$-E.V. et $A = \{ x_1, x_2,\ldots,x_n \}$ une partie finie de E.

La partie de E définie par $\mathrm{Vect}(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\ ,\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le sous-espace vectoriel engendré par A.

Remarque : Vect (A) est le plus petit SEV contenant A, au sens de l'inclusion

Vocabulaire :

★ Si $A = \{u\}$ alors $\mathrm{Vect}(A) = \{k.u,\ k\in\mathbb{K}\}$ est la **droite vectorielle** engendrée par u.

★ Si $A = \{ u, v \}$ avec u et v **non colinéaires**, alors $\mathrm{Vect}(A) = \{ \lambda u + \mu v\ ,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\}$ est le **plan vectoriel** engendré par $\{u,v\}$.

✍ ♥ Exercice résolu : *méthode 2*

① Montrer que $F = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x - 3y + z = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$

② Montrer que $G = \{(2t\ ,t\ ,\ 3t),\ t\in\mathbb{R}\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$

③ Montrer que les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ forment un SEV de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

3.3 Intersection de sous-espaces:

Proposition 14.4: Soit E un $\mathbb{K}$-E.V. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F\cap G$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Extension: Par récurrence immédiate, si $(F_i)_{1\le i\le n}$ est une famille de S.E.V. de E, leur intersection $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ est encore un SEV de E.

3.4 Somme de deux sous-espaces:

En général, $F\cup G$ n'est pas un S.E.V. de E, on introduit donc la notion suivante :

Def: Soit F et G deux SEV d'un $\mathbb{K}$–E.V. noté E, on appelle somme de F et de G la partie de E définie par $F+G = \{ x + y,\ x\in F,\ y\in G \}$.

Proposition 14.5 : F + G est un SEV de E et c'est le plus petit SEV contenant $F\cup G$, au sens de l'inclusion.

Dans la pratique : Soit $x\in E$, $x\in F + G$ si et seulement si $\exists x_F\in F, \exists x_G\in G, x = x_F + x_G$

Def: Soit F et G deux S.E.V. d'un $\mathbb{K}$-E.V. E.

- On dit que F et G sont en somme directe lorsque tout élément de F + G s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.
Dans ce cas, la somme est notée $F \oplus G$ ou lieu de F + G.
- On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsqu'ils sont en somme directe et que $F \oplus G = E$, c'est à dire : $\forall x\in E, \exists! x_1\in F, \exists! x_2\in G, x = x_1 + x_2$

Proposition 14.6: Soit F et G deux S.E.V. d'un $\mathbb{K}$-E.V. E.

① F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$

② F et G sont supplémentaires ssi [$E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$]

Dans la pratique : Pour montrer que F et G sont supplémentaires, on a deux méthodes possibles :
- Montrer que $E = F+G$ et $F\cap G = \{0_E\}$.
- Montrer que tout élément de E s'écrit de manière comme somme d'un élément de F et de G

Exemples de S.E.V. supplémentaires à connaître:

① Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires, on a $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

② $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ d'après l'unicité de l'écriture d'un complexe sous forme algébrique.

③ Les matrices symétriques et antisymétriques forment deux S.E.V. supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou encore $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

⌿ Attention: supplémentaire ne signifie pas complémentaire.

4. Familles de vecteurs

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (e_1, e_2,..., e_n)$ est une famille de n vecteurs de E, $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle sous-famille de $\mathcal{F}$ toute famille extraite de $\mathcal{F}$ (on enlève des vecteurs en conservant l'ordre de $\mathcal{F}$) et sur famille de $\mathcal{F}$ toute famille dont $\mathcal{F}$ est une sous-famille (on rajoute des vecteurs en conservant l'ordre de $\mathcal{F}$).

4.1 Familles génératrices:

Def: Soit F un SEV de E et $\mathcal{F} = (e_1, e_2,..., e_n)$ une famille de F.
On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F lorsque $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2,..., e_n)$

Vocabulaire: On dit aussi que $\mathcal{F}$ engendre F.

Remarque: Il n'y a pas unicité de la famille génératrice.

Dans la pratique : Pour montrer que $\mathcal{F} = (e_1, e_2,..., e_n)$ est génératrice de F, on montre que $\forall i\in[\![1, n]\!], e_i\in F$ et $\forall \vec{x} \in F, \exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i$

Proposition 14.7: Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2,..., e_n)$ est une famille génératrice de F.
① On obtient une autre famille génératrice de F en permutant les éléments d'une famille génératrice.
② Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice alors toute sur - famille de $\mathcal{F}$ obtenue en ajoutant des vecteurs de F est encore génératrice de F.
③ On ne peut pas enlever un vecteur d'une famille génératrice sans risquer de perdre le caractère générateur sauf s'il est une combinaison linéaire des autres

4.2 Familles libres, familles liées:

Def: La famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2,..., e_n)$ est libre dans E lorsqu'on a l'implication suivante:
$\forall(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.
ou encore l'équation $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i = 0_E$ admet (0, 0,…, 0) comme unique solution dans $\mathbb{K}^n$,
Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Vocabulaire: Si $\mathcal{F}$ est libre alors on dit que les vecteurs e_1, e_2,...et e_n sont linéairement indépendants et si $\mathcal{F}$ est liée, on dit que les vecteurs e_1, e_2,...et e_n sont linéairement dépendants.

Proposition 14.8: La famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2,..., e_n)$ de E est liée ssi un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Conséquences:
★ Toute famille contenant deux vecteurs colinéaires est liée.
★ Toute famille contenant 0_E ou une répétition est liée.
★ Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.
★ Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
★ Toute famille obtenue par permutation des éléments d'une famille libre est libre
★ Si $x \neq 0_E$ alors (x) est libre dans E.
★ (x, y) est libre dans E ssi x et y ne sont pas colinéaires.

Proposition 14.9: Soit $\mathcal{L} = \{e_1, e_2,..., e_p\}$ une famille libre de E et v un vecteur de E.
$\mathcal{F} = \{e_1,...,e_p, v\}$ est libre ssi $v \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$.

Dans la pratique: On ne peut pas rajouter un vecteur à une famille libre sans risquer de perdre la liberté sauf si ce vecteur n'est pas combinaison linéaire des autres.

4.3 Bases d'un sous-espace vectoriel:

Def: Soit F un SEV de E. On dit que $\mathcal{B} = (e_1, e_2,..., e_n)$ est une base de F lorsque $\mathcal{B}$ est à la fois libre dans E et génératrice de F.

Remarque: Si E admet une base $\mathcal{B}$, n'y a pas unicité de cette base, en particulier on a encore une base en permutant les vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exemples à connaître.

((1,0), (0,1)) est la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

((1, 0, …, 0), (0, 1, 0, …, 0), …, (0 , 0, …, 1)) est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

$(E_{i,j})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le p}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème 14.1 et définition: Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2,..., e_n)$ une famille de F.
$\mathcal{B}$ est une base de F si et seulement si tout vecteur $\vec{x}$ de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$ ou encore,

$$\forall x\in F,\ \exists\,!(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, e_i$$

Les scalaires λ_i sont les coordonnées ou composantes de x dans $\mathcal{B}$.

Attention: les coordonnées dépendent de la base choisie. Il faut faire attention à l'ordre des vecteurs de la base quand on donne les coordonnées.

Corollaire: Soit F de base $\mathcal{B}_1$ et G de base $\mathcal{B}_2$ deux sous-espaces vectoriels de E.
$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ obtenue en concaténant les bases de F et de G est une base de E ssi $E = F\oplus G$.

Vocabulaire : On dit que les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont adaptées à somme directe.

---

5. Espace vectoriel de dimension finie

5.1 Définition.

Def: On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, il est de dimension infinie.

Convention: $E = \{0_E\}$ est de dimension finie.

Exemples: $\mathbb{R}^2$ (le plan) , $\mathbb{R}^3$ (l'espace), $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

5.2 Existence de base en dimension finie

Théorème 14.2 dit de la base extraite : Soit E non nul et de dimension finie. De toute famille génératrice finie $\mathcal{G}$, on peut extraire une base de E.

✍ Preuve : On prouve l'algorithme suivant :

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{G}$
Tant que $\mathcal{B}$ est liée faire
  On cherche un vecteur v de $\mathcal{B}$ combinaison linéaire des autres.
  $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \setminus \{v\}$
Afficher $\mathcal{B}$

Corollaire: Tout $\mathbb{K}$ - espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

Théorème 14.3 dit de la base incomplète Soit E non nul et de dimension finie. Toute famille libre $\mathcal{L}$ peut se compléter pour donner une base de E.

✍ Preuve : On prouve l'algorithme suivant : Soit $\mathcal{G} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E.

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{L}$

Pour k allant de 1 à n faire

Si $e_k \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ alors

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{e_k\}$

Afficher $\mathcal{B}$

Dans la pratique: On peut fabriquer une base de E des deux manières suivantes:

★ En enlevant des vecteurs à une famille génératrice jusqu'à avoir une famille libre.

★ En complétant une famille libre avec des vecteurs qui ne sont pas combinaison linéaire des précédents, jusqu'à avoir une famille génératrice.

5.3 Dimension d'un espace vectoriel.

Lemme de la dimension: Soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie. Si E admet une base de cardinal p alors toute famille d'au moins (p + 1) vecteurs de E est liée.

Démonstration : Il suffit de le montrer pour p + 1 vecteurs

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

On considère une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0_E$.

On a pour tout k entre 1 et p + 1, $u_k = a_{k,1} e_1 + \cdots + a_{k,p} e_p$.

En injectant dans l'égalité précédente et en identifiant on obtient un système homogène

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 a_{2,1} + \cdots + \lambda_{p+1} a_{p+1,1} = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \lambda_1 a_{1,p} + \lambda_2 a_{2,p} + \cdots + \lambda_{p+1} a_{p+1,p} = 0 \end{cases}$$

de p équations à (p + 1) inconnues. Ce système a une infinité de solutions donc la famille est liée.

Conséquence: Si on une base de cardinal p alors les familles libres sont de cardinal au plus p. et les familles génératrices sont de cardinal au moins p.

Théorème 14.4 dit de la dimension : Soit E non nul et de dimension finie, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ sont deux bases de E alors n = p.

Def : Soit E un EV de dimension finie.

La dimension de E est l'entier naturel noté dim E défini par :

- dim E = 0 si $E = \{0_E\}$
- dim E est le cardinal de toutes les bases de E sinon.

Exemples à connaître :

★ dim $\mathbb{K}$ = 1 mais, attention, en tant que $\mathbb{R}$-ev, dim $\mathbb{C}$ = 2.

★ Un $\mathbb{K}$-ev de dim 1 est une droite vectorielle, un $\mathbb{K}$-ev de dim 2 est un plan vectoriel.

★ dim $\mathbb{K}^n = n$ en tant que $\mathbb{K}$-EV

★ dim $\mathcal{M}_{n,p} = np$

★ Si E et E' sont de dimension finie alors $E \times E'$ aussi et $\dim E \times E' = \dim E + \dim E'$

Proposition 14.10: ***Caractérisation des bases***: Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

① Toute famille libre est de cardinal au plus n et si $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

② Toute famille génératrice est de cardinal au moins n et si $\mathcal{F}$ est génératrice et de cardinal n alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

Dans la pratique: Si dim E = n, alors pour montrer qu'une famille de cardinal n est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien qu'elle est génératrice.

Exercice : Montrer que $\mathbb{R}^I$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont de dimension infinie

---

6. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

6.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel.

Def : On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie si l'espace vectoriel F est de dimension finie.

Exercice résolu : 14.17

Exemples à connaître :
- Les ensembles de solutions des EDL homogènes sont des EV de dimension 1 pour les EDL1 et de dimension 2 pour les EDL2
- L'ensemble des suites qui vérifient une SRL2 est un EV de dimension 2.

Proposition 14.11: Soit E de dimension finie.
① Tout SEV F de E est aussi de dimension finie et dim F $\leq$ dim E
② Si F est un SEV de E tel que dim F = dim E alors F = E.

6.2 Supplémentaire en dimension finie

Proposition 14.12: ***Existence d'un supplémentaire en dimension finie***
Soit E de dimension finie, tout SEV F de E admet un supplémentaire G dans E et
dim E = dim F + dim G.

Dans la pratique:
★ Le SEV engendré par des vecteurs qui complètent une base de F pour obtenir une base de E est un supplémentaire de F dans E.
★ Il n'y a pas unicité du supplémentaire: Soit P un plan $\mathbb{R}^3$, toute droite vectorielle D non incluse dans P est supplémentaire à P dans $\mathbb{R}^3$. *Faire une figure*

Théorème 14.5: Formule de Grassmann
Soit E de dimension finie et F et G deux SEV de E.
dim (F + G) = dim F + dim G - dim ($F\cap G$)

Corollaire: ***Caractérisation des supplémentaires en dimension finie***.
Soit E de dimension finie et F et G deux SEV de E.
① $F \oplus G = E \Leftrightarrow E = F + G$ et dimE = dimF + dimG
② $F \oplus G = E \Leftrightarrow F\cap G = \{0_E\}$ et dimE = dimF + dimG

6.3. Rang d'une famille de vecteur

Def: Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Lorsque le sous –espace F engendré par $\mathcal{F}$ est de dimension finie, sa dimension est le rang de la famille $\mathcal{F}$ noté rg($\mathcal{F}$).
C'est-à-dire, sous réserve d'existence, rg($\mathcal{F}$) = dim Vect($\mathcal{F}$).

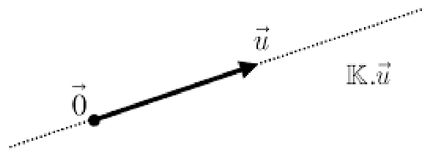
Dans la pratique : le rang de $\mathcal{F}$ est le cardinal de la plus grande famille libre que l'on peut extraire de $\mathcal{F}$.

Proposition 14.13 : Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ dans E de dimension n
① $rg(\mathcal{F}) \leq n$ et [$rg(\mathcal{F}) = n \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est génératrice de E].
② $rg(\mathcal{F}) \leq p$ et [$rg(\mathcal{F}) = p \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre dans E].
③ $rg(\mathcal{F}) = n = p \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une base de E
④ $rg(\mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{u} \in \mathcal{F},\ \vec{u} = \vec{0}$

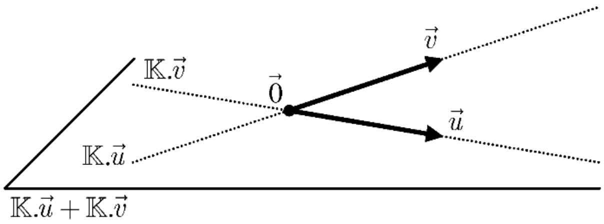
Dans la pratique : On modifie pas le rang d'une famille de vecteurs si :
★ On supprime un vecteur nul ou un vecteur figurant plusieurs fois (en laissant au moins un exemplaire de ce vecteur !).
★ On permute les vecteurs de la famille.
★ On multiplie un vecteur par un scalaire **non nul**.
★ On ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des **autres** vecteurs.
★ On enlève un vecteur combinaison linéaire des **autres** vecteurs.

Annexe : Quelques représentations

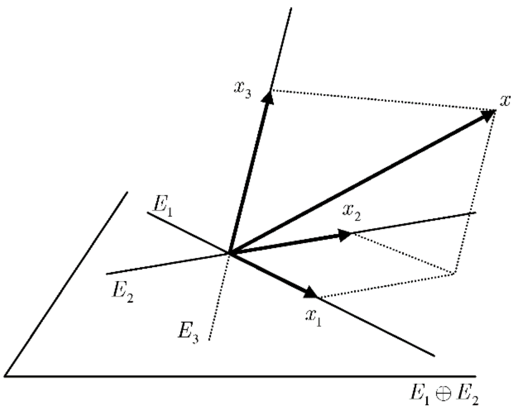
① Droite vectorielle :



② Plan vectoriel :



③ Somme directe : E_1 et E_2 sont en somme directe :
$\forall v \in E_1 + E_2, \exists\, !x_1 \in E_1, \exists\, !x_2 \in E_2, v = x_1 + x_2$.



Remarque : Ici on a aussi E_1, E_2 et E_3 en somme directe.

④ Sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$
$\forall w \in E, \exists\, !u \in F, \exists\, !v \in G, w = u + v$