Chapitre 13 : Méthodes à connaître sur les matrices carrées.

Soit A une **matrice carrée** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où n entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

① Comment calculer les puissances d'une matrice A?

• A connaitre :

✓ Matrice diagonale : Si $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

alors $\forall p \in \mathbb{N}$, A^p est diagonale et $A^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^p & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n^p \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p)$

✓ Matrice triangulaire : Si $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$

alors $\forall p \in \mathbb{N}$, A^p est triangulaire et $A^p = \begin{pmatrix} \alpha_1^p & \S & \cdots & \S \\ 0 & \alpha_2^p & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \S \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n^p \end{pmatrix}$

✓ Si A est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ etc… $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin $A^n = 0_n$

donc $\forall k \geq n$, $A^k = 0_n$. A est <u>nilpotente</u> d'ordre $p \leq n$

✓ Soit $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ alors , $\forall k \in \mathbb{N}$, $J^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0 \\ n^{k-1} J & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

• Utilisation d'un raisonnement par récurrence :

On calcule A^2, A^3, ….

On conjecture l'expression de A^n en fonction de n puis on démontre cette conjecture par récurrence.

• Utilisation d'un polynôme annulateur :

Si A^2 s'écrit comme combinaison linéaire de A et I_3, alors on peut :

① Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I_3$

② Calculer u_n et v_n en fonction n et en déduire une expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$

• Utilisation du binôme de Newton :

On cherche à écrire A sous la forme $A = M + N$ avec M et N qui **COMMUTENT** et telles que l'on sache calculer leurs puissances successives. Une des deux matrices est souvent αI_n avec $\alpha \in \mathbb{K}$ car αI_n commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $A^p = (M + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} M^k N^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} M^{p-k} N^k$

• **Attention** : Il faut souvent traiter à part le cas de l'exposant nul : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^0 = I_n$

② **Etudier l'inversibilité d'une matrice de $M_n(K)$ (sans calculer son inverse)** :

• On utilise le pivot de Gauss pour obtenir une matrice triangulaire par une succession d'OEL.

Si on à $A \underset{OEL}{\rightarrow} T$ alors (A est inversible) $\Leftrightarrow$ (T est inversible) $\Leftrightarrow$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $t_{i,i} \neq 0$

• On montre que $AX = 0$ a pour unique solution $X = 0$.
Pour cela il suffit de montrer que $AX = 0 \Rightarrow X = 0$

③ **Comment montrer que A est inversible et calculer A^{-1} ?**

• Résolution d'un système linéaire
On a : A est inversible $\Leftrightarrow$ Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ a une unique solution.

On résout le système $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, d'inconnues $x_1, \ldots, x_n$.

On résout ce système et s'il a une unique solution alors A est inversible.

L'expression du n-uplet de solution permet de déterminer A^{-1} puisque $X = A^{-1}B$

• Utilisation d'OEL

A est inversible $\Leftrightarrow$ $A \underset{OEL}{\rightarrow} I_n$

On utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour transformer A en I_n et on applique les mêmes OEL en parallèle sur I_n pour obtenir A^{-1}

$(A | I_n) \underset{OEL}{\rightarrow} (I_n | A^{-1})$

• Utilisation d'un polynôme annulateur
Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$ alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre

A partir d'une égalité sur les puissances de A, on se ramène à une égalité de la forme :
$A \times \underbrace{(\ \ldots\ )}_{A^{-1}} = I_n$

Application : Inverse de $A = I_n - N$ où N est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit N nilpotente c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$.

Comme A et I_n commutent, en utilisant la formule de Bernoulli, on a :

$$I_n = I_n^p - N^p = (I_n - N)(I_n + N + N^2 + \ldots + N^{p-1})$$

Donc $I_n - N$ est inversible et $(I_n - N)^{-1} = I_n + N + N^2 + \ldots + N^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$