Programme de colles-semaine 16 -02/02 au 06/02

I. Matrices et systèmes linéaires

• *Programme 15*

• Matrices carrées, opérations sur les matrices carrées, puissances entières, formule du binôme et de Bernoulli pour deux matrices qui commutent.
• Matrices carrées particulière : matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques.
• Matrices carrées inversibles : définition, exemples, compatibilité avec les opérations, notation $GL_n(\mathbb{K})$.
• Les OEL et les OEC conservent l'inversibilité.
• $A\in M_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow$ $AX = 0$ admet 0 comme unique solution

$\Leftrightarrow$ $\forall B\in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ a une unique solution

$\Leftrightarrow$ On peut obtenir I_n en appliquant une succession d'OEL à A.
• Calcul pratique de l'inverse : Système, OEL (pivot de Gauss) transformant $(A|I_n)$ en $(I_n|A^{-1})$.
• CNS d'inversibilité pour les matrices triangulaires
• Inversibilité à droite et à gauche : A est inversible ssi A est inversile à gauche ssi A est inversible à droite. Application au calcul de A^{-1}.
• Matrices semblables, Si A et B sont semblables avec $B = P^{-1}AP$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $B^n = P^{-1}A^nP$

II. Espaces vectoriels

• Définition et vocabulaire: vecteurs, scalaires, famille de vecteurs, vecteurs colinéaires, combinaisons linéaires, règles de calcul.
• Exemples de référence: vecteurs du plan et de l'espace, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,$\mathbb{R}^n$, $F(X,E)$ où X est non vide et E est un espace vectoriel, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
• Sous-espace vectoriel (SEV): définition et caractérisation, exemples.
• Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.
• L'intersection de deux SEV est un SEV.

Déroulement de la colle:

① Résolution d'un système linéaire de petite dimension avec ou sans paramètres ou inversion d'une matrice carrée de petite dimension avec ou sans paramètre.

② Une question de cours parmi

- Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
- Donner la définition de $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_n)$ est montrer que c'est un SEV de E
- Montrer que l'intersection de deux SEV est un SEV

③ Exercice(s) récapitulatif sur les matrices (sans notion de rang !) et sur les SEV (début).

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10