Programme de colles-semaine 17 -09/02 au 13/02

Espaces vectoriels

- Définition et vocabulaire: vecteurs, scalaires, famille de vecteurs, vecteurs colinéaires, combinaisons linéaires, règles de calcul.
- Exemples de référence: vecteurs du plan et de l'espace, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,$\mathbb{R}^n$, F(X,E) où X est non vide et E est un espace vectoriel, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- Sous-espace vectoriel (SEV): définition et caractérisation, exemples.
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.
- L'intersection de deux SEV est un SEV.
- Somme de deux SEV, F + G est le plus petit SEV contenant F∪G, somme directe, sous-espaces supplémentaires, caractérisation.

Exemples à connaître : Un plan et une droite de $\mathbb{R}^3$ (pouvoir représenter cette situation). Les fonctions paires et les fonctions impaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les matrices symétriques et antisymétriques des $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sont des SEV supplémentaires.

- Familles génératrices: définition, exemples, propriétés.
- Familles libres, liées: Définition, exemple, caractérisation d'une famille liée par un des vecteurs est CL des autres.
- Bases: Définition, exemples, caractérisation par l'existence et l'unicité de la décomposition dans la base, coordonnées d'un vecteur dans une base, base adaptée à une somme directe.
- Espace vectoriel de dimension finie : définition, exemples, théorème de la base extraite et de la base incomplète, existence de base en dimension finie.
- Cardinal d'une famille libre en dimension n, théorème de la dimension, familles libres et familles génératrice dans un espace de dimension n, exemples de référence, espace produit.
- Sous-espaces vectoriels en dimension finie, dimension d'une sev, existence d'un supplémentaire, formule de Grassmann, caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

Déroulement de la colle:

① Un calcul de dérivée sur le modèle de ceux proposés

② Une question de cours parmi

- Donner la définition de Vect(e_1,.....,e_n) est montrer que c'est un SEV de E
- Définition et caractérisation de deux SEV supplémentaires et traiter un exemple (dimension finie ou non).
- Définition d'une famille libre et traiter un exemple (éventuellement par récurrence)
- Enoncé et preuve de la formule de Grassmann.

③ Exercice(s) sur les espaces vectoriels.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Calculs de la semaine :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de validité :

$u : x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad v : x \mapsto \arcsin(x^2)$ $\quad w : x \mapsto x\arctan(x) - \ln\sqrt{x^2+1}$

$f_n : x \mapsto nx^2e^{-x}$ $\quad g_n : x \mapsto \sin^n(x)\cos(x)$ $\quad$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

Pour ces deux dernières fonctions, on donne une forme factorisée au maximum

Réponses :

$u'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$

$v'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ sur]-1, 1[

$w'(x) = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$

$f_n'(x) = nxe^{-nx}\left(2-nx\right)$ sur $\mathbb{R}$

$g_n'(x) = \sin^{n-1}(x)\left((n+1)\cos^2(x)-1\right)$ sur $\mathbb{R}$