Chapitre 15: Dérivabilité d'une fonction numérique - résumé de cours

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux réels.
f désigne une fonction définie sur I et a un réel de I, ainsi f est définie en a.
On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

$\overset{o}{I}$ désigne l'intervalle ouvert de même borne que I.

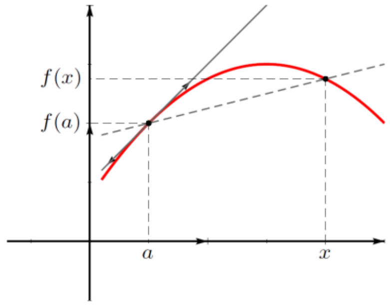
1. Dérivée première

1.1 Dérivabilité en a

Rappel: Pour tout $x \in I\backslash\{a\}$, $\tau_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le taux d'accroissement de f en a.

Def: Soit f définie sur I et $a \in I$.

① Si $a \neq \sup(I)$, on dit que **f est dérivable à droite de a** lorsque τ_a admet une limite finie à droite de a. Lorsque c'est le cas, cette limite est le nombre dérivé à droite de a noté $f'_d(a)$.



② Si $a \neq \inf(I)$, on dit que **f est dérivable à gauche de a** lorsque τ_a admet une limite finie à gauche de a. Lorsque c'est le cas, cette limite est le nombre dérivé à gauche de a noté $f'_g(a)$.

③ Si $a \in \overset{o}{I}$ on dit que **f est dérivable en a** lorsque f est dérivable à droite et à gauche de a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$, ou encore si τ_a admet une limite finie en a.

Lorsque c'est le cas, cette limite est le nombre dérivé de f en a noté f'(a).

④ Si a = sup(I) (resp. inf(I)) f est dérivable en a lorsque f est dérivable à gauche (resp. à droite) de a.

★ Interprétation graphique :

• Si f dérivable en a, la droite y = f(a) + f'(a)(x-a) est, par définition, la tangente à la courbe C_f au point A(a,f(a)).

• Si f n'est pas dérivable en a, on peut avoir les cas suivants:

- Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) de a alors C_f admet en A une demi-tangente de pente $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).
- Si τ_a admet une limite infinie en a avec f continue en a (resp à droite ou à gauche de a) alors C_f admet une tangente (resp. demi-tangente) verticale en A.
- Si τ_a admet des limites à droite et à gauche de a différentes alors A est un point anguleux de C_f.

Théorème 15.1: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel α et une fonction ε définie sur I telle que
$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \ (*)$$
Dans ce cas, $\alpha = f'(a)$

★ Vocabulaire: $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est la **meilleure approximation affine de f en a**.
Ainsi pour x proche de a on peut remplacer f(x) par $f(a) + f'(a)(x-a)$, l'erreur commise étant négligeable devant (x - a).

Pour $|x| \ll 1$ $\quad \sin x \approx x \qquad \tan x \approx x \qquad$ et $\qquad (1 + x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$

★ Remarque : Pour tout réel h tel que $(a + h) \in I$, on peut poser $x = a + h$ dans (*), on obtient :

$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h)$.
Cette écriture est appelé **développement limité d'ordre 1 de f en a**.

Corollaire: Si f est dérivable en a alors f est continue en a

Attention: réciproque fausse. *Vous devez connaître des contre-exemples !*

1.2 Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée.

Def: f est **dérivable sur I** lorsqu'elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, la fonction définie sur I par $a \mapsto f'(a)$ est la f**onction dérivée** de f notée f' (ou $\frac{df}{dx}$ ou Df).

Notation: On note $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Proposition 15.1: Soit f et $g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

① $(f + g) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(f + g)' = f' + g'$ $\quad (\lambda f) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f)' = \lambda f'$

② $(fg) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$

③ Si $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, $(f/g) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$

④ Soit $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(J,\mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$, $g \circ f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(g \circ f)' = f'.(g' \circ f)$.

1.3 Dérivabilité de la bijection réciproque

Proposition 15.2 : Soit $f : I \to J$ bijective et a un réel de I.
Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

★ Interprétation graphique: Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à (y = x).
Lorsque f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$ alors la courbe représentative de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse f(a) de coefficient directeur $\dfrac{1}{f'(a)}$.
Lorsque f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $b = f(a)$ et sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

Corollaire :
Soit $f : I \to J$ bijective, dérivable sur I et a un réel de I.
Si $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

2. Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

2.1 Dérivée d'ordre n, classe d'une fonction.

Def: On pose $f^{(0)} = f$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, alors f est **n fois dérivab**le sur I et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

$f^{(n)}$ est la dérivée nième, ou d'ordre n, de f, on peut aussi noter $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ ou $D^n f$.

★ Remarques:
- $f^{(1)}$ est la dérivée première notée plutôt f' et $f^{(2)}$ est la dérivée seconde notée plutôt f".
- Si f est n fois dérivable sur I alors f est k fois dérivable sur I pour tout $k \le n$.

★ Vocabulaire et notations : Soit $n\in\mathbb{N}^*$
- On note $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivable sur I.
- On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I avec $f^{(n)}$ continue sur I, de telles fonctions sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur I.
- Si $\forall n\in\mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I alors f est dérivable à tout ordre ou **indéfiniment dérivable** sur I, ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Résumé sur les ensembles de fonctions :

$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \supset ... \supset \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \supset ... \supset \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$ $\qquad f\in\mathcal{C}^n(I) \Leftrightarrow \forall k\in[\![0, n]\!], f^{(k)}\in\mathcal{C}^{n-k}(I)$.

2.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Proposition 15.3: Soit f et $g\in\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

① $(f + g)\in\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et $(\lambda f)\in\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

② $(f.g)\in\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$ *Formule de Leibniz*

③ Si $\forall x\in I$, $g(x) \neq 0$, $(f/g)\in\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

④ Soit $f\in\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $g\in\mathcal{C}^n(J, \mathbb{R})$ avec $f(I)\subset J$, $g\circ f\in\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$

★ Remarque: *Ces théorèmes restent valables si on remplace* $\mathcal{C}^n$ *par* $\mathcal{C}^\infty$.

2.3 Classe de la bijection réciproque

Proposition 15.4 : Soit $f\in\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ avec $n\in\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$.
Si $\forall x\in I$, $f'(x) \neq 0$ alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

★ Vocabulaire: f est de classe $\mathcal{C}^n$, bijective avec f^{-1} de classe $\mathcal{C}^n$ est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme.

3. Théorèmes sur les fonctions dérivables:

3.1 Dérivée et extremum

Théorème 15.2: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \overset{\circ}{I}$.
Si f est dérivable en a et si f(a) est un extremum local alors $f'(a) = 0$.

Attention: Réciproque fausse.

★ Dans la pratique: Les extrema locaux d'une fonction sont à chercher là où sa dérivée s'annule, aux bornes de I et en ses points de non dérivabilité.

3.2 Accroissements finis et conséquences

Théorème de Rolle: Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a,b[$, avec $a < b$
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Illustration graphique :

Exercice résolu : Soit f une fonction $\mathcal{C}^n$ sur I, montrer que si f s'annule en (n +1) points distincts de I alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.

Théorème des accroissements finis: Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, avec $a < b$.
Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Illustration graphique :

Corollaire 1: Inégalités des accroissements finis: Soit f continue sur un intervalle I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et $(a, b) \in I^2$, avec $a < b$.

① Si $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

② Si $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

③ Si $|f'|$ est bornée par M sur $\overset{\circ}{I}$ alors $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Def : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et k un réel, $k > 0$.
On dit que f est k-lipschitzienne sur I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$
On dit que f est lipschitzienne sur I lorsqu'il existe $k > 0$ tel que f est k-lipschitzienne sur I

Propriété immédiate : Si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I.

★ Conséquences des accroissements finis

- Si $|f'|$ est bornée par k sur $\mathring{I}$ alors f est k-lipschitzienne
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [a, b]$ alors f' est bornée et f est lipschitzienne sur I.

Corollaire 2: Variations d'une fonction dérivable: Soit f continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

① f est croissante (resp. décroissante) sur I ssi $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur $\mathring{I}$

② f est constante sur I ssi $f' = 0$ sur $\mathring{I}$

③ f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I ssi

$\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) \geq 0$ (resp. $\forall x \in \mathring{I}$, $f' \leq 0$) et f' ne s'annule qu'un des points isolés sur $\mathring{I}$.

★ Dans la pratique: Attention de bien appliquer ces résultats sur un **intervalle**.

3.3 Obtention de la dérivabilité par passage à la limite dans f'(x)

Théorème de la limite de la dérivée : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

① Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

② Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \pm\infty \in \mathbb{R}$, alors f n'est pas dérivable en a et C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse a

Attention: Aucune notion de prolongement ici, f est définie en a, et on ne prolonge pas la dérivée : f'(a) existe ou pas !

★ Remarque : Avec comme hypothèse f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$, on obtient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. En effet, f est alors dérivable en a donc sur I et comme f'(a) est donnée par la valeur de la limite de f'(x) en a, f' est continue en a donc continue sur I.

4. Fonctions convexes :

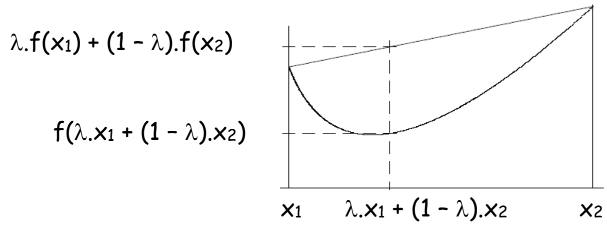
Def: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- f est convexe sur I lorsque $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.
- f est concave sur I lorsque $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

Remarques: f est concave sur I ssi – f est convexe sur I.

Interprétation graphique :

- La courbe représentative d'une fonction convexe est située en-dessous de ses cordes.
- La courbe représentative d'une fonction concave est située au-dessus de ses cordes.



Exercice : Montrer que les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$

Proposition 15.5 - lemme des trois pentes: Soit f une fonction convexe sur I et $(a, b, c) \in I^3$ tels que a < c < b. On a $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

✍ Illustration graphique :

Proposition 15.6: Soit f définie sur I

① Si f est dérivable sur I alors (f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I).
Dans ce cas ; la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes.

② Si f est deux fois dérivable sur I alors (f est convexe ssi $f''(x) \geq 0$)

Remarque : Ses résultats sont à adapter dans le cas où f est concave sur I en utilisant que -f est convexe sur I.

Vocabulaire : Si f est deux fois dérivable sur I, en un point a où sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe, la courbe représentative de f change de concavité. On dira que (a, f(a) est un *point d'inflexion*.

✍ Inégalités de convexité à connaître :

a. $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$ **b.** $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ **c.** $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

5. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.

Ici la notation |.| désigne le module.

Déf:
① f est dérivable en a si et seulement τ_a admet une limite dans $\mathbb{C}$ en a.
Si c'est le cas, on note f'(a) cette limite.
② f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I
③ f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple: $f : x \mapsto e^{\alpha x}$ avec α fixé dans $\mathbb{C}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}$

Proposition 15.7: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$
① f est dérivable en a ssi Re(f) et Im(f) sont dérivables en a
et f'(a) = (Re(f))'(a) + i(Im(f))'(a).

② f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ssi Re(f) et Im(f) sont dde classe C^n sur I
et $f^{(n)} = (\mathrm{Re}(f))^{(n)} + i(\mathrm{Im}(f))^{(n)}$

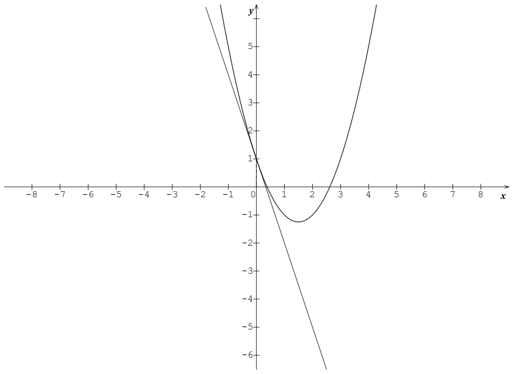
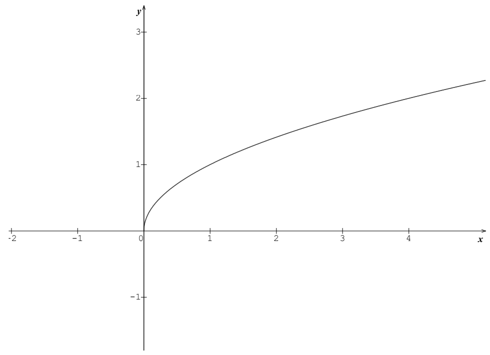
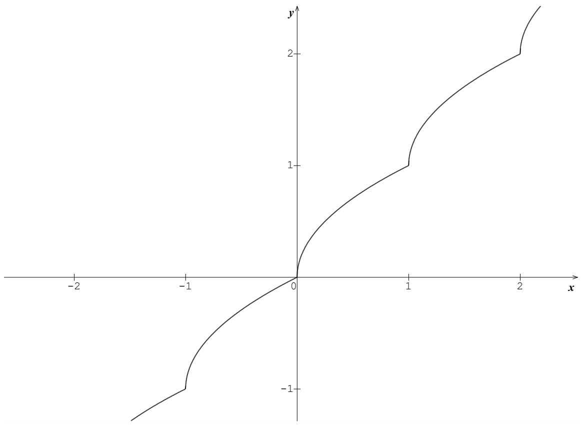
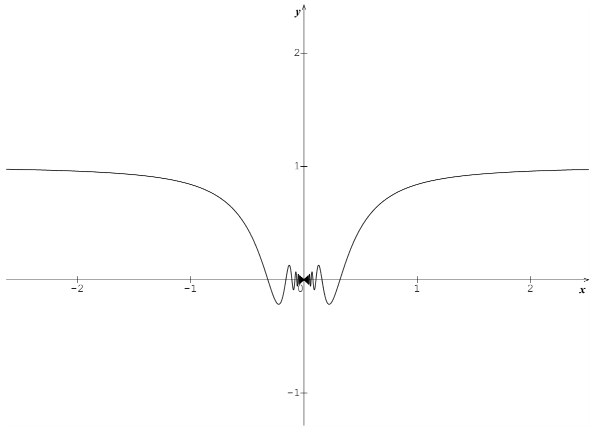
★ Conséquences:
• On peut étendre les règles de calcul des dérivées.
• On peut utiliser les fonctions à valeurs complexes pour obtenir les dérivées nièmes de fonctions parties réelles ou imaginaires d'une fonction à valeurs complexes, par exemple, cosinus et sinus.

Proposition 15.8: Inégalité des accroissements finis: Soit $f:[a, b] \to \mathbb{C}$, continue et dérivable sur]a, b[. Si il existe un réel M tel que: $\forall x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M.|b - a|$.

Conséquence: Soit $f:I\to\mathbb{C}$, dérivable sur I, f constante sur I ssi $f' = 0$ sur I

Attention: On n'a plus le théorème de Rolle, ni l'égalité des accroissements finis.

Annexe 1 : Exemples d'étude de la dérivabilité en a = 0

$f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ 	$f : x \mapsto \sqrt{x}$ 
$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ 	$f : x \mapsto x \sin\dfrac{1}{x}$ et $f(0) = 0$ 

Annexe 2: Dérivées successives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f^{(k)}(x)$	commentaires
x^{α} Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$	$\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k+1)x^{\alpha - n}$ $\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{p-n} \text{ si } k \le n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$	Par suite si f une fonction polynômiale de degré p alors pour tout $k \le n$, $f^{(k)}$ est une fonction polynômiale de degré $n - k$ et pour tout $k > n$, $f^{(k)} = 0$.
$e^{\alpha x}$	$\alpha^k e^{\alpha x}$	α est un réel ou un complexe.
$\cos(x)$	$\cos(x + k\frac{\pi}{2})$	
$\sin(x)$	$\sin(x + k\frac{\pi}{2})$	
$\dfrac{1}{x-a}$	$(-1)^k \dfrac{k!}{(x-a)^{k+1}}$	Reste valable pour $a \in \mathbb{C}$.
$\ln\lvert x - a\rvert$	$(-1)^{k-1} \dfrac{(k-1)!}{(x-a)^k}$	$k \ge 1$
$u(ax+b)$	$a^k.u^{(k)}(ax+b)$	Avec u de classe $\mathcal{C}^k$

Les six premières fonctions sont de classe C^{∞} sur les intervalles où elles sont définies

---

Annexe 3 : Deux démonstrations de la proposition 15.1 donnant la dérivabilité de gof.

On suppose que f est dérivable sur I, g est dérivable sur J avec $f(I) \subset J$.
Pour tout réel a de I, on a f dérivable en a, puisque $a \in I$, et g dérivable en b = f(a) puisque $b \in f(I)$ donc $b \in J$. On va démontrer que h = gof est dérivable en a avec $h'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Méthode 1 : A l'aide des taux d'accroissement.

• Soit $x \in I$, $x \neq a$. deux cas sont à envisager :

1er cas : $f(x) \neq f(a)$.
Dans ce cas, $\tau_{h,a}(x) = \dfrac{h(x) - h(a)}{x - a} = \dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

On pose y = g(x), on a $\tau_{h,a} = \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} \times \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tau_{g,b}(y) \times \tau_{f,a}(x)$

2ème cas : Si f(x) = f(a)

dans ce cas, $\tau_{h,a}(x)=\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}=\dfrac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=0$ et $\tau_{f,a}(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ donc l'égalité $\tau_{h,a}(x)=\tau_{g,b}(y)\times\tau_{f,a}(x)$ reste vraie.

Bilan : $\boxed{\forall x\in I\backslash\{a\},\ \tau_{h,a}(x)=\tau_{g,b}(y)\times\tau_{f,a}(x) \text{ avec } y = f(x) \text{ et } b = f(a).}$

• Comme f est dérivable en a , on a $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(a)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\tau_{f,a}(x)=f'(a)$.

Comme f est dérivable en a, f est également continue en a donc quand $x\to a$, $y = f(x)\to b$ donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}=\lim\limits_{y\to b}\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}=\lim\limits_{y\to b}\tau_{g,b}(y)$.

Or g est dérivable en b donc $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}=g'(b)=g'(f(a))$.

Ainsi par produit des limites, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\tau_{h,a}=f'(a)\times g'(f(a))}$.

On a donc, par définition : $\boxed{\text{gof est dérivable en tout réel a de I et } h'(a) = g'(a)\times g'(f(a)).}$

Méthode 2 : A l'aide du développement limité d'ordre 1 (Théorème 15.1) :

f est dérivable en a donc il existe $\varepsilon_1 : I\to\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\mapsto a}\varepsilon_1(x)=0$ et

$\forall x\in I$, $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$.

f est dérivable en b = f(a) donc il existe $\varepsilon_2 : J\to\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{y\mapsto b}\varepsilon_1(y)=0$ et

$\forall y\in J$, $g(y) = g(b) + (y-b)g'(b) + (y-b)\varepsilon_2(y)$. (♠)

Or $\forall x\in I$, $f(x)\in J$, donc on peut poser y = f(x) dans (♠) :

$\forall x\in I$, $g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x) - f(a))g'(f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon_2(f(x))$.

D'après (♣), $\forall x\in I$, $f(x) - f(a) = (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))$

D'où $\forall x\in I$, $g(f(x)) = g(f(a)) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))g'(f(a)) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))$.
$= g(f(a) + (x-a)f'(a)\times g'(f(a)) + (x-a)[\ \varepsilon_1(x)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))\ ]$

Posons $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))$. ε est définie sur I, étudions sa limite en a :

Par hypothèse: $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x)=0$

De plus f est dérivable en a donc continue en a, par suite $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=b$ et

donc $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_2(f(x))=\lim\limits_{y\to b}\varepsilon_2(y)=0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

D'après le théorème 15.1, $\boxed{\text{gof est dérivable en a et } (gof)'(a) = f'(a)\times g'(f(a))}$

Conclusion : gof est dérivable sur I et (gof)' = f'×(g'of).