Exercices – Chapitre 15: Dérivabilité d'une fonction numérique

♦ Eléments de correction en ligne - ♥ A savoir refaire

Dérivabilité

♥ **15.1** Etudier la dérivabilité et donner la dérivée des fonctions suivantes:

$f(x) = x^x$ $\quad g(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad h(x) = \ln|\ln x|$ $\quad k(x) = \arccos(\tan(x))$

♥ **15.2** Etudier la dérivabilité de f en 0 dans les cas suivants :

a. $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ $\quad$ b. $f(x) = x^2\ln x$ et $f(0) = 0$ $\quad$ c. $f(x) = \begin{cases} x\ln x \text{ si } x > 0 \\ e^x - 1 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$

15.3 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\exists k\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|^2$
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer f.

15.4 Soit f dérivable en a, étudier $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

♦ **15.5** Soit f une fonction dérivable sur [0, 1]. On définit g sur [<à, 1] par

$g(x) = \begin{cases} f(2x) \text{ si } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \\ f(2x-1) \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$ Donner une CNS sur f pour que g soit dérivable sur [0,1]

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

15.6 Montrer que

a. $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ si $x \ne 0$ et $f(0) = 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

b. On pose $\forall x > 0$, $f(x) = x^3\ln x$. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 puis montre que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^2$. Sur $\mathbb{R}_+$.

c. Pour tout $(a, b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \le 1 \\ x^2+ax+b \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

Déterminer les couples de réel (a, b) pour lesquels f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

♥ **15.7** Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et expliciter leur dérivée nième, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a. $f(x) = e^{2x}(x^2 - 3x + 1)$ $\quad$ b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $I =]1, +\infty[$

c. $f(x) = \cos^3 x$, $I = \mathbb{R}$. $\quad$ d. $f(x) = \sin x.e^x$, $I = \mathbb{R}$

e. $f_n(x) = x^2(1+x)^n$, $I = \mathbb{R}$. $\quad$ f. $f_n(x) = x^{n-1}.\ln(x)$, $I =]0;+\infty[$

15.8 Soit $n\in\mathbb{N}$ et f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{1/x}$, justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $f_n^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}$

15.9 Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \begin{cases} x^{n+1} \text{ si } x \ge 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

a. Montrer que f_0 est continue sur $\mathbb{R}$, puis que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$

♦ **15.10** Calculer la dérivée nième de la fonction $f: x \mapsto x^n(x+1)^n$.

En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

15.11 Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}e^x$

a. Justifier que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à préciser.

b. On note g la bijection réciproque. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

c. Etudier la dérivabilité de g en 0.

♦ **15.12** Soit f une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Etudier la dérivabilité des fonctions $c : t \mapsto \overline{f(t)}$ et $m : t \mapsto |f(t)|$ sur I et calculer leurs dérivées.

♦ **15.13** Soit $f : t \mapsto \begin{cases} t^2 e^{i/t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Théorèmes sur les fonctions dérivables

♦ **15.14** Soit f et g deux fonctions dérivables sur [a, b] telles que f(a) = g(a) et f(b) = g(b). Montrer qu'il est possible de trouver un réel k tel que les courbes représentatives des fonctions f et g + k dans un repère orthonormé soient tangentes en un point.

♥ **15.15** ***Théorème de Rolle généralisé***:

Soit f une fonction définie et continue sur $I = [a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c)=0$

Indication: Utiliser la fonction g:t->f($\frac{1}{t} + a - 1$) définie sur]0;1]

♥ **15.16** ***Egalité des accroissements finis généralisés***:

1. Soit f et g deux fonctions continues sur [a,b] et dérivable sur]a,b[avec a < b

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c).(g(b) - g(a)) = g'(c).(f(b) - f(a))$.

2a. En déduire le résultat suivant connu sous le nom de règle de l'Hospital : Soit f et g deux fonctions continues au voisinage V de x_0, dérivables sur $V\setminus\{x_0\}$, telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\forall x \in V\setminus\{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

2.b. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

15.17 Soit f deux fois dérivable sur [a, b] vérifiant f(a) = f(b) = 0.

Montrer que pour tout réel c de]a, b[, il existe $d \in]a, b[$ tel que: $f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d)$.

On pourra s'intéresser à $\varphi \mapsto f(x) - \frac{(x-a)(x-b)}{2}A$ où A est une constante à déterminer.

♦ **15.18** ***Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2***

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur [a,b], montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{2}(b - a)^2$$

♥ **15.19** Montrer que le théorème de Rolle ne s'étend pas aux fonctions à valeurs complexes en utilisant la fonction $x \mapsto e^{ix}$

♥ **15.20** ***Utilisations classiques des inégalités des accroissements finis:*** Montrer que

a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$ b. $\forall x \in [0,\pi/2]$, $-x^2 \leq \cos x - 1 \leq 0$, c. $\forall x > 0$, $\arctan(x) > \frac{x}{1+x^2}$

15.21 Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est contractante sur $\mathbb{R}$.

15.22 Démontrer que $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \dfrac{-\ln(n)}{n^2}$

15.23 Une *inégalité classique et une application.*

Démontrer que $\forall x>0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{pn} \dfrac{1}{k}$ où $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$.

♦ **15.24** Soit f continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[telle que f(a) = f(b).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_n$ appartenant à]a, b[, deux à deux distincts, tels que : $\sum\limits_{j=1}^{n} f'(x_j) = 0$.

15.25 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$ avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

♦ **15.26** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

15.27 Soit f :[0, 1]→[0, 1] une fonction dérivable qui vérifie $f\circ f = f$ et qui n'est pas constante. Montrer que f est l'application identité. *On commencera par montrer que $\forall y\in f([0, 1])$, $f(y) = y$*

Convexité

15.28 ***Des inégalités***

a. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[-1, +\infty[$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

b. En utilisant la concavité de ln sur son ensemble de définition, montrer que :

$\forall x,y > 0$, $\forall p, q > 1$, tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$

c. Etudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto -\ln(\ln x)$ sur son ensemble de définition.

En déduire que $\forall x, y > 1$, $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$

15.29 ***Fonctions convexes sur*** $\mathbb{R}$

a. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est majorée alors f est constante.

b. Soit f une fonction convexe et dérivable sur $[0, +\infty[$. Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est décroissante et en déduire que f' tend vers 0 en $+\infty$.

♦ **15.30** ***Inégalité arithmético-géométrique***

Etant donné une famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ de n réels strictement positifs, on définit les moyennes arithmétique et géométrique de ces réels par

$m = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ et $g = \sqrt[n]{a_1 \times \cdots \times a_n} = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$

a. Dans cette question, n = 2. Montrer que $m \geq g$

b. En utilisant la concavité de ln sur son ensemble de définition, montrer par récurrence sur n que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \geq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(a_i)$ et en déduire que $m \geq g$

Retenons : $\forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\sqrt[n]{a_1 \times \cdots \times a_n} \leq \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$