## Programme de colles-semaine 18 -16/02 au 20/02

---

**I. Espaces vectoriels**

- Familles génératrices: définition, exemples, propriétés.
- Familles libres, liées: Définition, exemple, caractérisation d'une famille liée par un des vecteurs est CL des autres.
- Bases: Définition, exemples, caractérisation par l'existence et l'unicité de la décomposition dans la base, coordonnées d'un vecteur dans une base, base adaptée à une somme directe.
- Espace vectoriel de dimension finie : définition, exemples, théorème de la base extraite et de la base incomplète, existence de base en dimension finie.
- Cardinal d'une famille libre en dimension n, théorème de la dimension, familles libres et familles génératrice dans un espace de dimension n, exemples de référence, espace produit.
- Sous-espaces vectoriels en dimension finie, dimension d'une sev, existence d'un supplémentaire, formule de Grassmann, caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

**II. Dérivabilité d'une fonction numérique.**

- Dérivabilité en a, dérivabilité à droite et à gauche, interprétation graphique : tangente et demi-tangente.
- f est dérivable en a ssi il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, de limite nulle en a et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :
$\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$. Dans ce cas, $f'(a) = \alpha$
- Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée, opération sur les dérivées, dérivation de la composée, de la bijection réciproque.
- Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, formule de Leibniz, dérivées successives des fonctions usuelles.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et telle que $f'(x) \neq 0$ sur I alors f induit une bijection de I sur f(I) et $f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur f(I).

---

**Déroulement de la colle:**

① Un calcul de dérivée sur le modèle de ceux proposés

② Une question de cours parmi

- Définition d'une famille libre et traiter un exemple (éventuellement par récurrence)
- Enoncé et preuve de la formule de Grassmann.
- Enoncer la formule de Leibniz (avec ces hypothèses) et proposer un exemple
- Formule et preuve par récurrence d'une dérivée nième à connaître (page 2)

③ Exercice(s) sur les espaces vectoriels, la dérivabilité en a, les dérivées successives

---

**Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10**

---

**Calculs de la semaine :**

Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de validité :

$u : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad v : x \mapsto \arcsin(x^2)$ $\qquad w : x \mapsto x\arctan(x) - \ln\sqrt{x^2+1}$

$f_n : x \mapsto nx^2 e^{-nx}$ $\qquad g_n : x \mapsto \sin^n(x)\cos(x)$ $\qquad$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

*Pour ces deux dernières fonctions, on donne une forme factorisée au maximum*

Réponses en page 2:

$u'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$

$v'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ sur ]-1, 1[

$w'(x) = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$

$f_n'(x) = nxe^{-nx}\left(2-nx\right)$ sur $\mathbb{R}$

$g_n'(x) = \sin^{n-1}(x)\left(\left(n+1\right)\cos^2(x) - 1\right)$ sur $\mathbb{R}$

---

***Dérivées nièmes des fonctions usuelles à connaître***

| f(x) | $f^{(k)}(x)$ | commentaires |
|---|---|---|
| $x^\alpha$<br><br>Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ | $\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k+1)x^{\alpha - n}$<br>$\begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}x^{p-n} \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$ | Par suite si f une fonction polynômiale de degré p alors pour tout k ≤ n, $f^{(k)}$ est une fonction polynômiale de degré n – k et pour tout k > n, $f^{(k)} = 0$. |
| $e^{\alpha x}$ | $\alpha^k e^{\alpha x}$ | $\alpha$ est un réel ou un complexe. |
| cos(x) | $\cos(x + k\frac{\pi}{2})$ | |
| sin(x) | $\sin(x + k\frac{\pi}{2})$ | |
| $\frac{1}{x-a}$ | $(-1)^k \frac{k!}{(x-a)^{k+1}}$ | |
| $\ln\lvert x - a\rvert$ | $(-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(x-a)^k}$ | $k \geq 1$ |
| u(ax+b) | $a^k.u^{(k)}(ax+b)$ | Avec u de classe $C^k$ |