

Programme de colles-semaine 19 -09/03 au 13/03

I. Dérivabilité d'une fonction numérique.

- Dérivabilité en a , dérivabilité à droite et à gauche, interprétation graphique : tangente et demi-tangente.
- f est dérivable en a ssi il existe $\varepsilon : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, de limite nulle en a et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :
 $\forall x \in \mathbb{I}, f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$. Dans ce cas, $f'(a) = \alpha$
- Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée, opération sur les dérivées, dérivation de la composée, de la bijection réciproque.
- Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, formule de Leibniz, dérivées successives des fonctions usuelles.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et telle que $f'(x) \neq 0$ sur I alors f induit une bijection de I sur $f(I)$ et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $f(I)$.
- Théorèmes sur les fonctions dérivables:
 - ★ Si f dérivable en a avec $f(a)$ extremum local alors $f'(a) = 0$.
 - ★ Théorème de Rolle
 - ★ Théorème des accroissements finis et corollaires : Inégalités des AF et principe de Lagrange.

application: Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

★ Théorème de la limite de la dérivée .

- Fonctions convexes, lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité pour une fonction dérivable, deux fois dérivables, inégalités classiques :

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes, utilisation dans les calcul des dérivées nièmes, par exemple, $f(x) = e^x \sin(x)$
-

Déroulement de la colle:

- ① Un calcul de dérivée nième parmi ceux proposés en bas de page ou sur le même modèle
 - ② Une question de cours parmi
 - Enoncé et démonstration du théorème de Rolle à illustrer graphiquement
 - Enoncé et démonstration du théorème des accroissements finis à illustrer graphiquement
 - Définition d'une fonction convexe à illustrer graphiquement, énoncer le lemme des trois pentes et justifier l'une des trois inégalités du cours.
 - ③ Exercice(s) d'analyse : continuité, dérivabilité, fonction de classe $\mathcal{C}^n$, convexité, suite récurrente guidée)
-

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Calculs de la semaine : Donner les dérivées nièmes des fonctions suivantes

$$f(x) = e^{2x}(x^2 - 3x + 1)$$

$$g(x) = \sin x \cdot e^x$$

$$f_n(x) = x^2(1+x)^n$$

$$g_n(x) = x^{n-1} \cdot \ln(x)$$

(Exercice 15.7)

Dérivées nièmes des fonctions usuelles à connaître

$f(x)$	$f^{(k)}(x)$	commentaires
x^α Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$	$\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)x^{\alpha - k}$ $\begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$	Par suite si f une fonction polynômiale de degré p alors pour tout $k \leq n$, $f^{(k)}$ est une fonction polynômiale de degré $n - k$ et pour tout $k > n$, $f^{(k)} = 0$.
$e^{\alpha x}$	$\alpha^k e^{\alpha x}$	α est un réel ou un complexe.
$\cos(x)$	$\cos(x + k \frac{\pi}{2})$	
$\sin(x)$	$\sin(x + k \frac{\pi}{2})$	
$\frac{1}{x - a}$	$(-1)^k \frac{k!}{(x - a)^{k+1}}$	
$\ln x - a $	$(-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(x - a)^k}$	$k \geq 1$
$u(ax+b)$	$a^k \cdot u^{(k)}(ax+b)$	Avec u de classe C^k