

Exercices – Chapitre 16: Polynômes

♦ Corrigé- ♥ A savoir refaire

Définition, degré

♦ 16.1 On pose $H_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = H_n' - 2XH_n$. Déterminer les polynômes H_1, H_2, H_3 puis le degré et le coefficient dominant de H_n .

♥ 16.2 Justifier que $\arctan$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme

T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\arctan^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x^2)^n}$. Préciser le degré de T_n et son coefficient dominant.

♥ 16.3 Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré du polynôme $P = (X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$.

16.4 Déterminer le degré puis les coefficients du polynôme $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + X^{2^k})$.

♥ 16.5 Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

Algèbre linéaire et polynômes

♥ 16.6 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on donne $P = X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et les familles suivantes : $B_1 = (1, X, X^2, X^3)$, $B_2 = (1, X + 1, (X + 1)^2, (X + 1)^3)$ et $B_3 = (X^3, X^2(X - 1), X(X - 1)^2, (X - 1)^3)$. Montrer que ces familles sont des bases de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner les coordonnées de P dans chacune d'elles.

16.7 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère le polynôme $A = X^2 + 1$

On pose $F = \{P \in E \mid A \text{ divise } P\}$.

a. Montrer que F est un SEV de E .

b. Montrer que $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$

c. Donner une base de F .

16.8 Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$, on définit

$F = \{P \in E, P(1) = P'(0) = P(-1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(X^2, X(X+1), (X+1)^2)$.

a. Montrer que F et G sont des SEV de E et en donner une base.

b. Déterminer $F \cap G$. Que peut-on en déduire.

16.9. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

a. Justifier que $\mathcal{F} = (1, (X - 1), (X - 1)^2, \dots, (X - 1)^n)$ est une base de E .

On pose $n = 3$, donner les coordonnées dans cette base de $X^3 - 2X^2 + X - 1$.

b. Soit $P \in E$, quelles sont les coordonnées de $Q = P(X + 1)$ dans la base canonique de E ?

16.10 On note E l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

On pose $P_0 = 2, P_1 = X$ et pour tout $k \in [0, n-2]$, $P_{k+2} = XP_{k+1} - P_k$

Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E

16.11 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = P'(0) = P''(0)\}$.

a) Montrer que F est un espace vectoriel et préciser sa dimension

b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.

♥ 16.12 Soit n fixé dans $\mathbb{N}$, on considère la famille $(X^k(1 - X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}[X]$.

a. Dans cette question, $n = 2$. Montrer que la famille est libre.

b. Montrer que la famille est libre, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Division euclidienne

♥ **16.13** Effectuer les divisions euclidiennes suivantes:

- a. $A = X^5 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$
 b. $A = X^4 + aX^3 + bX + c$ par $B = X^2 + 1$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
 c. $A = X^n - 2X + 1$ par $B = (X - 2)$

♥ **16.14** Déterminer le reste des divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:

- a. $A = X^n$ par $B = X^2 - 3X + 2$ b. $A = X^n$ par $B = X(X - 1)^2$ c. $A = X^{2n} + 1$ par $B = X^2 + 1$

16.15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les restes dans les divisions euclidiennes de $A = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$ par $(X - 3)$, $(X - 3)(X - 2)$ puis par $(X - 2)^3$ dans $\mathbb{R}[X]$.

♦ **16.16** Soit a et b deux complexes et $P \in \mathbb{C}[X]$, déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

♥ **16.17 Une application aux matrices** : On considère $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

- a. Vérifier que $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = O_3$.
 b. Déterminer le reste dans la division de X^n par $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.
 c. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Racines, factorisation

♥ **16.18** Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes

$X^7 - 1$, $X^8 - 1$, $X^3 + 1$, $X^4 + X^2 + 1$ et $X^6 + 1$

16.19 Factoriser $P = X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ de deux méthodes différentes : A l'aide des racines de P puis sans les racines de P

♥ **16.20** On donne $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$

- a. Montrer que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est racine de P et donner son ordre de multiplicité.
 b. Que déduire de la parité de P ?
 c. Décomposer P dans $\mathbb{R}[X]$.

16.21 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$

- a. $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ 2 est une racine multiple de P
 b. $X^6 - X^5 + 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 - X + 1$
 c. $X^{2n} - 2X^n \cos(n\theta) + 1$ avec $n \geq 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

♦ **16.22** Montrer que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est racine de $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.

En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.

♦ **16.23** Trouver une CNS sur l'entier n pour que $X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

♥ **16.24 Un classique** : Rappeler la factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

En déduire la factorisation de $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis une expression simple de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Dérivation, racines multiples.

♦ **16.25** Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $P'^2 = 4P$

16.26 Montrer que $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X - 1)^3$.

♥ **16.27** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

♦ 16.28 Déterminer les polynômes P divisibles par P' dans $\mathbb{K}[X]$.

♥ 16.29 Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2+1)P'' - 6P = 0$

16.30 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$.

a. Peut-on dire que si α est racine de P d'ordre de multiplicité m , alors α est racine de P' d'ordre de multiplicité $(m-1)$?

b. Montrer que si P est scindé alors P' est aussi scindé.

♥ 16.31 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n , $n \geq 1$, possédant n racines réelles distinctes.

a. Montrer que P' possède $(n-1)$ racines réelles.

b. En déduire que les racines de $Q = P^2 + 1$ sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.

Relations entre coefficients et racines

♥ 16.32 Soit $n \geq 2$ et $P_n = (X+i)^n - (X-i)^n$

Déterminer les racines de P et en déduire $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n-1} \cot \pi k/n$ et $\beta_n = \prod_{k=1}^{n-1} \cot \pi k/n$

16.33 Soit $P = X^3 - 7X^2 + 5X + 2$.

a. Montrer que P admet trois racines réelles x_1, x_2 et x_3 telles que $x_1 < x_2 < x_3$

b. Calculer la valeur de $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ et $\sigma = x_1x_2x_3$.

c. En déduire les valeurs de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

d. On note S_p la somme $x_1^p + x_2^p + x_3^p$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $Q = X^p \cdot P$.

En utilisant que x_1, x_2 et x_3 sont racines de Q , écrire une relation de récurrence entre S_{p+3} , S_{p+2} , S_{p+1} et S_p .

♥ 16.34 Résoudre dans $\mathbb{C}^2$:
$$\begin{cases} z + w = 3i - 4 \\ zw = -12i \end{cases}$$

Famille de polynômes

16.35 Polynômes de Tchebychev : Soit n un entier naturel fixé.

a. Montrer qu'il existe un unique polynôme noté T_n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$

b. Déterminer T_0, T_1 et T_2

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$

d. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n

16.36 Polynômes interpolateurs de Lagrange

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et on considère $(n+1)$ réels $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.

a. Montrer, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme L_i de E tel que $L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

On pourra commencer par traiter le cas où $n=2$

b. Montrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de E et donner les coordonnées de $P \in E$ dans cette base.

c. On donne $A_0, A_1, \dots, A_n$ $(n+1)$ points distincts du plan, déterminer une fonction polynômiale f de degré au plus n dont la courbe représentative passe par les points $A_0, A_1, \dots, A_n$.

d. Expliciter f pour $n=2$ et $A_0(-1, 1), A_1(1, 2)$ et $A_3(2, -3)$