

Chapitre 16 - Polynômes - résumé

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

1.1. Définition et écriture formelle des polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$

Définitions:

- On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$, nulle à partir d'un certain rang.
- Deux polynômes $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont égaux s'ils sont définis par la même suite de coefficients : $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$
- On appelle polynôme nul le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- On appelle degré d'un polynôme $A = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, non nul, le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$.
On note : $\deg(A) = n$.
- Le coefficient a_n correspondant au degré est appelé coefficient dominant du polynôme A .
On note : $\text{cdom}(A) = a_n$.
- Si le coefficient dominant d'un polynôme est 1, on dit que le polynôme est unitaire.
- Les polynômes de degré 0 et le polynôme nul sont dits constants.

Notation: L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Conventions:

Si $P = 0$, $\deg(P) = -\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}, -\infty < n, (-\infty) + n = n + (-\infty) = -\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Écriture formelle : Soit $P = (a_n)$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, P s'écrit de manière formelle sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k. \text{ Si } P \neq 0, \text{ en posant } \deg(P) = n, \text{ on a plus précisément } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_n \neq 0$$

Attention : il faut bien garder à l'esprit que X n'est ni un scalaire ni une inconnue : c'est un polynôme dont les coefficients vérifient $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \delta_{1,k}$

Cas particulier : Lorsque P est de degré 0, il est constant et on note $P = a_0$ plutôt que $P = a_0 X^0$

1.2 Addition et multiplication par un scalaire.

Proposition 16.1 et définition : Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$

$$\textcircled{1} P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k \text{ est un polynôme de } \mathbb{K}[X].$$

$$\textcircled{2} \deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \text{ et si } \deg(P) \neq \deg(Q) \text{ alors } \deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$$

Dans la pratique: lorsque $\deg(P) = \deg(Q) = n$, on a $\deg(P + Q) \leq n$ et pour déterminer le degré il faut calculer $a_n + b_n$

Proposition 16.2 et définition : Soit $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\textcircled{1} \lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k \text{ est un polynôme de } \mathbb{K}[X]$$

$$\textcircled{2} \deg(\lambda P) = \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0 \text{ et } \deg(\lambda P) = -\infty \text{ si } \lambda = 0$$

1.3 Produit de deux polynômes:

Proposition 16.3 et définition: Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

$PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$ avec $\forall k \in \mathbb{N}, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On a:

① $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

② $\text{cdom}(PQ) = \text{cdom}(P) \times \text{cdom}(Q)$

③ La règle du produit nul est vraie dans $\mathbb{K}[X]$: $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$

Le produit de deux polynômes est une loi intègre.

Exercice : Montrer avec la définition que si $P = X$ et $Q = X^n$ alors $PQ = X^{n+1}$

Dans la pratique : Avec l'écriture formelle les calculs s'effectuent naturellement en utilisant les règles sur les opérations dans $\mathbb{K}$.

1.4 Calculs dans $\mathbb{K}[X]$

Proposition 16.4

① Le produit est une loi interne à $\mathbb{K}[X]$, qui est associative, commutative et qui possède un élément neutre : le polynôme constant $X^0 = 1$.

② Le produit de deux polynômes est distributif sur l'addition et compatible avec le produit externe. on pourra donc peut appliquer les **formules du binôme et de Bernoulli** :

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, (P+Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} \text{ et } P^n - Q^n = (P-Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$$

☞ Exercice 16.3

1.5 Fonctions polynomiales

Définition: Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$, la fonction polynomiale associée à P est $\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k \end{cases}$

On note $\mathbb{K}(x)$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 16.5: L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}(x) \\ P \mapsto \tilde{P} \end{cases}$ est une bijection.

Dans la pratique : On identifie le plus souvent P et $\tilde{P}$, c'est-à-dire qu'on note P la fonction polynomiale associée.

Conséquence: Evaluation en a

Si $a \in \mathbb{K}$, on note $P(a)$ le réel $\tilde{P}(a)$. On dit qu'on évalue P en a .

En particulier si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ alors $P(0) = a_0$.

Dans la pratique : On pourra substituer un scalaire à l'indéterminée mais aussi un objet dont on sait calculer des puissances et des combinaisons linéaires. Par exemple, une matrice carrée :

soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_n A^n$ est une matrice carrée d'ordre n .

1.6 Composition de deux polynômes:

Définition: Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ et $Q = \sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Le polynôme composé $P \circ Q$ est le polynôme associé à la fonction polynômiale $\tilde{P} \circ \tilde{Q}$

ou encore : $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k Q^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} b_i X^i \right)^k$

Dans la pratique: On substitue à X le polynôme Q : Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$

$$P(X+1) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (X+1)^k, \quad P(X^2) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^{2k}, \quad P(-X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (-1)^k X^k$$

Proposition 16.6 : Si P et Q sont deux polynômes non nuls, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.

Remarques:

★ Si $Q = X$, $P \circ Q = P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ est une autre écriture du polynôme P .

★ Pour éviter les ambiguïtés, on écrira $(X+1)P$ pour le produit et $P(X+1)$ pour la composée.

2. Algèbre linéaire dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème 16.1: $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque: Le vecteur nul de $\mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul.

Définition: Soit $\mathcal{F} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

On dit que $\mathcal{F}$ est une famille échelonnée en degré ou encore à degrés échelonnés lorsque $\forall k \in [1, n-1], \deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$ ou encore $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$

Exemple : $(1, X^2 - X + 2, X^4, X^6 + 1)$ ou $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ sont échelonnées en degré

Théorème 16.2: Soit $\mathcal{F} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ une famille finie de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

Si $\mathcal{F}$ est échelonnée en degré alors $\mathcal{F}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

Exemples:

$\mathbb{K}_0[X]$ est l'ensemble des polynômes constants, on l'identifie à $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 2 , $\mathbb{K}_2[X] = \{aX^2 + bX + c, a, b, c \in \mathbb{K}\}$.

Proposition 16.7: $\mathbb{K}_n[X]$ un SEV de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $(n+1)$

La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

☞ Exercice 16.6

3. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition: Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A ou encore que A est un multiple de B lorsqu'il existe $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BD$. On note $B|A$.

Remarques:

★ Si $A \neq 0$ et si $B|A$ alors $\deg(B) \leq \deg(A)$.

★ $\forall P \in \mathbb{K}[X], 0 = P \times 0$ donc P divise 0 .

★ 0 ne divise que lui-même.

Vocabulaire: P et Q sont dits associés lorsque $P|Q$ et $Q|P \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, P = \lambda Q$.

Théorème 16.3 et définition: Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, $B \neq 0$.

Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $(\mathbb{K}[X])^2$ tel que:

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Q est le quotient et R est le reste dans la **division euclidienne** de A par B .

Algorithme en annexe

Remarque: Il est clair que $B|A \Leftrightarrow R=0$

Dans la pratique: Le reste dans la division de P par $(X - a)$ est le polynôme constant $P(a)$

✎ Exercice 16.13

4. Dérivation formelle

4.1 Dérivée première

Définition: Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On note P' et on appelle polynôme dérivé de P le polynôme défini par:

$$P' = 0 \text{ si } \deg(P) \leq 0 \text{ et } P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = a_1 + 2a_2 X + \dots + n a_n X^{n-1} \text{ si } \deg(P) \geq 1.$$

Remarques:

★ La définition appliquée à $P = X^n$ donne $(X^n)' = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ nX^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$

★ Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction polynomiale associée à P' est la fonction dérivée de $\tilde{P}$.

Proposition 16.8 : Propriétés de la dérivation formelle: $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\textcircled{1} \deg(P') = \begin{cases} -\infty & \text{si } P \text{ est constant} \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{évident}$$

$$\textcircled{2} (P + Q)' \text{ et } (\lambda P)' = \lambda P' \quad \text{il suffit d'écrire les définitions}$$

$$\textcircled{3} (PQ)' = P'Q + PQ'$$

Preuve de $\textcircled{3}$ en annexe

4.2 Dérivées successives

Définition: Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On définit les polynômes dérivés successifs de P par $P^{(0)} = P$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$

♥ A connaître: Dérivées successives de X^n .

★ Si $k < n$, $(X^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$

★ Si $k = n$, $(X^n)^{(n)} = n!$

★ Si $k > n$, $(X^n)^{(k)} = 0$

Conséquences:

★ Si $\deg(P) = n$ alors $\forall k \leq n$, $\deg(P^{(k)}) = n - k$ et $\forall k > n$, $P^{(k)} = 0$.

★ $P \in \mathbb{K}_n[X] \Leftrightarrow P^{(n+1)} = 0$

Propriétés de la dérivation formelle d'ordre k: $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$

① $(P + Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$ et $(\lambda P)^{(k)} = \lambda P^{(k)}$ *par récurrence*

② $(PQ)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P^{(i)} Q^{(k-i)}$ *Formule de Leibniz pour les polynômes, par récurrence.*

☞ Exercice 16.11 et 16.29

4.3 Formule de Taylor pour les polynômes:

Théorème 16.4: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\forall a \in \mathbb{K}$, $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$

ou encore $P(X + a) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$

Dans la pratique:

★ La famille $(1, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base de Taylor.

★ La formule de Taylor donne directement une expression du reste dans la division euclidienne

de P par $(X - a)^k$: $R = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X - a)^i = P(a) + P'(a)(X - a) + \dots + \frac{P^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} (X - a)^{k-1}$

★ Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, la formule de Taylor avec $a = 0$ donne directement une expression des

coefficients de P : $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

☞ Exercice 16.9

5. Racines d'un polynôme

5.1 Définition et caractérisation

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on dit que α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = \tilde{P}(\alpha) = 0$

Remarques:

★ Le polynôme nul a une infinité de racines.

★ Un polynôme constant non nul n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$.

Proposition 16.9: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$

① α est racine de $P \Leftrightarrow (X - \alpha) \mid P$

② $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ deux à deux distincts dans $\mathbb{K}$ sont racines de $P \Leftrightarrow (X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_n) \mid P$

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

- ① Si $\deg(P) = n \geq 0$, alors P possède au plus n racines.
- ② Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ possède au moins $(n + 1)$ racines alors $P = 0$.
- ③ Si P a une infinité de racines dans $\mathbb{K}$ alors $P = 0$.

✎ Exercice 16.35

5.2 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

On dit que α est racine de P d'ordre de multiplicité (ou d'ordre) m lorsque $(X - \alpha)^m$ divise P et $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P . C'est à dire : $\exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - \alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$

Vocabulaire:

Si $m = 1$ on dit que α est racine simple, si $m = 2$, racine double et si $m = 3$ racine triple.

Si $m \geq 2$ on dit que α est une racine multiple de P .

Proposition 16.10: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ deux à deux distincts dans $\mathbb{K}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont racines de P de multiplicité respectives $m_1, m_2, \dots, m_p$ si et seulement si

$(X - \alpha_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \alpha_p)^{m_p} \mid P$ et les α_i ne sont pas racines du quotient.

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

Si $\deg(P) = n \geq 0$ alors P possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité c'est à dire $m_1 + m_2 + \dots + m_p \leq n$.

Proposition 16.11: Caractérisation à l'aide des dérivées successives:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, α est racine de P d'ordre de multiplicité m si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

Remarque: Ce résultat montre que si α est racine de P d'ordre de multiplicité m alors α est racine de P' d'ordre $m-1$, de P'' d'ordre $m-2$ etc...

✎ Attention:

Si on a $(X - \alpha)^k \mid P$ alors α est racine de P d'ordre au moins k .

De même si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$.

Autrement dit, m est l'ordre de la première dérivée ne s'annulant pas en α

✎ Exercices 16.26 et 16.27.

6. Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$:

6.1 Polynômes irréductibles:

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geq 1$.

P est irréductible lorsque $\forall A, B \in \mathbb{K}[X], P = AB \Rightarrow \deg(A) = 0$ ou $\deg(B) = 0$

ou encore : P est irréductible si les seuls polynômes qui le divisent sont constants.

A savoir: Tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

✎ Attention: $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$ par $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$

Proposition 16.12: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geq 1$.

- ① P admet un diviseur irréductible.
- ② P se décompose en produit de facteurs irréductibles

6.2 Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème de d'Alembert-Gauss: Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

Admis, appelé aussi *théorème fondamental de l'algèbre*

Corollaire:

- ① Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1
- ② Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ peut s'écrire sous la forme:

$$P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \quad \text{où } \lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C} \text{ et } r, m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*.$$

- ③ Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ a exactement n racines comptées avec leur ordre de multiplicité, c'est à dire : $m_1 + \dots + m_r = n$

Dans la pratique: Pour factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, on cherche les racines, si ce n'est pas possible, on utilise des formules comme le binôme de Newton ou Bernoulli.

♥ A connaître: En notant $\omega_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$, $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

6.3 Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Proposition 16.13: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) \geq 1$. Si P admet une racine complexe α de multiplicité m alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P de multiplicité m .

Conséquences: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) \geq 1$.

- ★ Les racines de P sont réelles ou deux à deux conjuguées.
- ★ Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

Proposition 16.14: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant négatif.

✗ Attention: l'absence de racines réelles n'entraîne l'irréductibilité : aucun polynôme de $\deg \geq 3$ n'est irréductible dans $\mathbb{R}$.

Corollaire: Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ peut s'écrire sous la forme:

$$P = \lambda \prod_{i=1}^s (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^t (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{n_j}$$

où λ et $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t, \gamma_1, \dots, \gamma_t \in \mathbb{R}$, $s, t \in \mathbb{N}$ et $m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}^*$.

Dans la pratique: On factorise P dans $\mathbb{C}[X]$ et on regroupe les racines deux à deux conjuguées.

♥ A connaître: Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. On part de $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1^{er} cas: n est pair, on pose $n = 2p$.

$$X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} (X - \omega_k)(X - \bar{\omega}_k) = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{p-1} (X^2 - 2\cos\frac{k\pi}{p}X + 1)$$

2^{ème} cas: n est impair, on pose $n = 2p+1$.

$$X^{2p+1} - 1 = (X-1) \prod_{k=1}^p (X - \omega_k)(X - \bar{\omega}_k) = (X-1) \prod_{k=1}^p (X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{2p+1}X + 1)$$

☞ Exercices : 16.18 et 16.20

7. Relation entre coefficients et racines :

Définition: Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, de degré $n \geq 1$.

P est scindé sur $\mathbb{K}$ si P se décompose en produit de facteurs irréductibles de degré 1, c'est à

dire, $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ avec λ coefficient dominant de P et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des scalaires pas nécessairement distincts.

Remarque : Tous les polynômes sont scindés sur $\mathbb{C}$.

Proposition 16.15: Somme et produit des racines : Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, de degré $n \geq 1$, scindé sur $\mathbb{K}$, de racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non nécessairement distinctes.

$$\text{On a, } S = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } P = a_1 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

♥ A connaître: Pour $n = 2$ et $n = 3$

$$\text{Si } aX^2 + bX + c = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \text{ alors } S = \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{Si } aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) \text{ alors } S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\frac{d}{a}.$$

$$\text{On a aussi } \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = \frac{c}{a}.$$

$$\text{Application: } \begin{cases} x + y + z = S \\ xy + xz + yz = Q \Leftrightarrow x, y \text{ et } z \text{ sont les racines de } X^3 - SX^2 + QX - P. \\ xyz = P \end{cases}$$

☞ Exercices : 16.32 et 16.34

8. Décomposition en éléments simples de certaines fractions rationnelles et applications

Def : On appelle fraction rationnelle le quotient de deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$, avec $Q \neq 0$.

Si $F = \frac{P}{Q}$, on appelle pôles de F les racines du polynôme Q .

Proposition 16.16 : Soit $F = \frac{P}{Q}$, une fraction rationnelle et E le quotient dans la division euclidienne de P par Q

Si Q est scindé à racines simples avec $Q = c \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$,

$$\text{alors } \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, F = E + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - \alpha_i}$$

Admis

Dans la pratique : Conformément au programme de PCSI, dans le cas où Q a des racines multiples ou encore si Q n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, la décomposition en éléments simples sera guidée par l'énoncé.

Applications :

① Calculer $I = \int_0^1 \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

② Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

③ Calculer la dérivée nième de $f : x \mapsto \frac{x^2 + 5}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

Annexes :

① **Preuve de la proposition 16.3:** On pose $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j$

1^{er} cas $P = 0$ ou $Q = 0$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 0$ donc PQ est le polynôme nul.

$\deg(PQ) = -\infty$ et $\deg(P) + \deg(Q) = -\infty + (-\infty)$ donc $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

2nd cas : $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

On pose $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$

P est un polynôme de degré p donc $\forall n > p, a_n = 0$

Q est un polynôme de degré q donc $\forall n > q, b_n = 0$

On pose $N = p + q$

$c_N = a_0 b_N + \dots + a_{p-1} b_{q+1} + a_p b_q + a_{p+1} b_{q-1} + \dots + a_N b_0 = a_p b_q \neq 0$

et $\forall n > N, c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^p a_i b_{n-i} + \sum_{i=p+1}^n a_i b_{n-i} = 0$
 $= 0$ car $N - i < q$

On en déduit que (c_n) est un polynôme de degré $N = \deg(P) + \deg(Q)$ et que $(PQ = 0)$ ssi $(P = 0$ ou $Q = 0)$

② **Preuve de la proposition 16.9**

1^{er} cas : Si $P = 0$ ou $Q = 0$ alors l'égalité est vraie.

2nd cas : Supposons $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. En notant $p = \deg(P)$ et $q = \deg(Q)$, on a

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$$

• Par définition $PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ et $(PQ)' = \sum_{k=0}^{p+q-1} (k+1) c_{k+1} X^k$

• D'autre part, $P' = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_{k+1} X^k = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k X^k$ et $Q' = \sum_{k=0}^{q-1} (k+1) b_{k+1} X^k = \sum_{k=0}^{q-1} \beta_k X^k$, d'où

$PQ' = \sum_{k=0}^{p+q-1} d_k X^k$ où $d_k = \sum_{i=0}^k \alpha_i \beta_{k-i} = \sum_{i=0}^k (i+1) a_{i+1} b_{k-i}$ et $P'Q = \sum_{k=0}^{p+q-1} e_k X^k$ où

$$e_k = \sum_{j=0}^k \alpha_j \beta_{k-j} = \sum_{j=0}^k (j+1) a_{j+1} b_{k-j} \quad \text{et donc} \quad PQ' + P'Q = \sum_{k=0}^{p+q-1} (d_k + e_k) X^k$$

$$\text{Calculons } d_k + e_k = \sum_{i=0}^k (i+1) a_{i+1} b_{k-i} + \sum_{j=0}^k (j+1) a_{j+1} b_{k-j}$$

En posant $i = j + 1$ dans la deuxième somme, on obtient,

$$\begin{aligned} d_k + e_k &= \sum_{i=0}^k (i+1) a_{i+1} b_{k-i} + \sum_{i=1}^{k+1} i a_i b_{k+1-i} \\ &= (k+1) a_0 b_{k+1} + \sum_{i=1}^k (k-i+1+i) a_i b_{k+1-i} + (k+1) a_{k+1} b_0 \\ &= (k+1) \sum_{i=0}^{k+1} a_i b_{k+1-i} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de $(k+1) c_{k+1}$.

• Conclusion: $(PQ)'$ et $(PQ' + P'Q)$ ont même degré $(p+q-1)$ et mêmes coefficients donc ils sont égaux.