

Chapitre 15 Complément de cours : Méthode pratiques pour l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1

Soit une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$. La suite (u_n) définie par:
 $u_0 \in D$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite récurrente d'ordre 1 associée à la fonction f .

On a $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1) = f \circ f(u_0)$ etc... $u_n = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ fois}}(u_0)$

Cette fiche rassemble des résultats généraux, qui doivent être redémontrés en s'adaptant à l'exercice proposé

1. Problème d'existence, notion d'intervalle stable :

La suite (u_n) est bien définie lorsque tous ses termes existent. Ceci est réalisé ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$.

Lorsque $D = \mathbb{R}$, la suite u est toujours bien définie.

Def: Soit I un intervalle contenu dans D . On dit que I est stable par f lorsque $f(I) \subset I$ c'est à dire $\forall x \in I, f(x) \in I$.

C'est le cas lorsque $f : I \rightarrow I$

Résultat 1: Soit I stable par f et u une suite associée à f , si $u_0 \in I$ alors on montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \in I$.

Exercice 1: Soit u la suite définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$

On note f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$

Montrer que $I = [0, +\infty[$ est stable par f en déduire que (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

2. Suite associée à une fonction monotone:

Lorsque $f : I \rightarrow I$ est monotone, on peut en déduire des informations sur la monotonie de (u_n)

Résultat 2: Soit I un intervalle stable par f et (u_n) une suite associée à f avec $u_0 \in I$.

① Si f est croissante sur I alors on montre par récurrence que:

Si $u_0 \leq u_1$ alors u est croissante.

Si $u_0 \geq u_1$ alors u est décroissante.

Dans tous les cas, u est monotone

② Si f est décroissante sur I alors les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones d'après ① et de monotonie contraire.

Dans la pratique: Il n'est pas toujours facile, ni possible de trouver des intervalles stables sur lequel f est monotone. Pour une méthode plus générale, revenons à la définition: Il s'agit de déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

On peut alors s'intéresser à la fonction $g: x \rightarrow f(x) - x$.

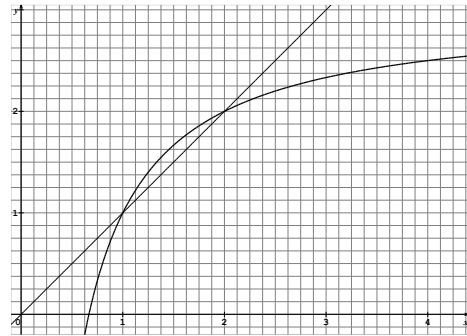
Si la suite prend ces valeurs dans I et si g garde un signe constant sur I alors la suite est monotone et son sens de variation est donné par le signe de $g(x)$.

Exercice 2 : Soit u la suite définie par $u_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n}$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x}$$

- Montrer que $I = [1, +\infty[$ est stable par f et en déduire que u est bien définie.
- Etudier le signe de $g(x) = f(x) - x$ sur I
- Donner le sens de variation de u en fonction de la valeur de u_0 .
- Etudier la convergence de u .



3. Limite et point fixe :

Def. : Soit $a \in D$, on dit que a est un point fixe de f ssi $f(a) = a$ c'est à dire a est solution de $f(x) = x$ sur D .

Interprétation géométrique : Les points fixes de f sur I , si ils existent, sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f sur I et de la droite ($y = x$).

Résultat 3: Soit I un intervalle stable par f et (u_n) une suite associée à f avec $u_0 \in I$.
Si $u_n \rightarrow \ell$ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$

Démonstration:

Dans la pratique: Avec les mêmes hypothèses, si I est un intervalle fermé et si f est continue sur I alors $\ell \in I$ et $\ell = f(\ell)$.

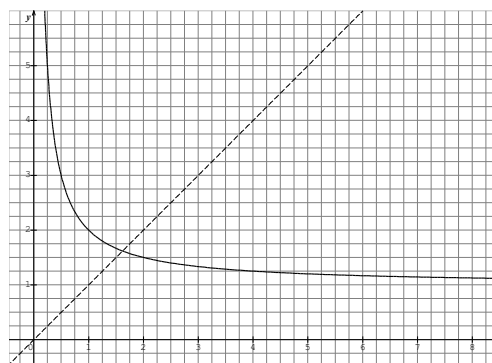
Attention: La recherche des points fixes de f par la résolution de l'équation $f(x) = x$ fournit les seules limites (finies) possibles pour la suite u , mais la suite u peut très bien ne pas converger même si f admet des points fixes et même si elle n'en admet qu'un seul.

Remarque: Dans le cas où $f : I \rightarrow I$ est décroissante sur I , pour démontrer que u converge on pourra démontrer que les deux sous suite convergent vers la même limite. Attention, les limites possibles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont les points fixes de $g = f \circ f$.

Exercice 3 : Soit u la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $g = f \circ f$

- Etudier la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et justifier que u est bien définie.
- u est-elle monotone ?
- Donner le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et ses éventuels points fixes.
- Etudier la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .



4. Cas où f est contractante :

Def: On dit que f est **contractante** sur I ssi f est k -lipschitzienne sur I avec $0 \leq k < 1$,
C'est-à-dire : $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Dans la pratique: On utilise le plus souvent l'inégalité des accroissements finis pour établir que f est contractante sur I : il suffit de majorer $|f'(x)|$ par $k < 1$ sur R

Résultat 4: Soit I un intervalle stable par f et α un point fixe de f sur I .

Si f est k -contractante sur I et si u est associée à f avec $u_0 \in I$ alors on montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$ et on en déduit que $u_n \rightarrow \alpha$

contrôlée par l'inégalité par $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$. La convergence de la suite est d'autant plus rapide que k est petit.

Exercice 4: Montrer que la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{4}$ est contractante sur $[0, 1]$, puis étudier la

convergence de la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$