

## Fiche : Méthode pratiques pour l'étude d'une suite récurrente

**1. Suite récurrente linéaire****1.1 SRL d'ordre 1**

**Def :**  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique ou récurrente linéaire d'ordre 1 lorsqu'il existe deux réels  $a$  et  $b$ , tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ .

**1<sup>er</sup> cas:  $a=1$  :**  $u$  est une **suite arithmétique** de raison  $b$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_p + (n-p)b$

**2<sup>ème</sup> cas:  $a \neq 1$  et  $b=0$  :**  $u$  est une **suite géométrique** de raison  $a$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_p a^{n-p}$

**3<sup>ème</sup> cas:  $a \neq 1$  et  $b \neq 0$  :** On note  $\ell$  l'unique solution de l'équation  $ax + b = x$

En considérant le système,  $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{cases}$ , on montre que la suite  $v$  de terme général  $u_n - \ell$  est géométrique de raison  $a$ . On en déduit que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 - \ell).a^n + \ell$

$u$  converge ssi  $(a^n)$  converge ssi  $|a| < 1$  ou  $u_0 = \ell$  et dans tous les cas la limite est  $\ell$ .

**1.2 SRL d'ordre 2**

**Def :**  $(u_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe deux réels  $a$  et  $b, b \neq 0$ , tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ .

**Théorème 11.6:** On considère l'équation caractéristique:  $r^2 - ar - b = 0$  ( $E_c$ )

① Si ( $E_c$ ) admet deux racines réelles  $r_1$  et  $r_2$ , alors  $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$

② Si ( $E_c$ ) admet une racine double ( $r_0$ ) alors  $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B).r_0^n$

③ Si ( $E_c$ ) admet deux racines complexes conjuguées  $re^{i\theta}$  et  $re^{-i\theta}$  alors  $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$

★ Dans la pratique : On détermine les valeurs de  $A$  et  $B$  en utilisant les valeurs de  $u_0$  et de  $u_1$ .

**2. Suites linéairement imbriquées**

Ce sont par exemple trois suites  $x, y$  et  $z$  vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{cases} . \text{ On pose } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} ;$$

On a  $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$  et par récurrence immédiate,  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ .

Le problème se ramène donc au calcul des puissances de la matrice  $A$ .

**3. Suite récurrente d'ordre 1, cas général.**

Soit une fonction définie sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}$ . La suite  $(u_n)$  définie par:

$u_0 \in D$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$  est une suite récurrente d'ordre 1 associée à la fonction  $f$ .

On a  $u_1 = f(u_0), \quad u_2 = f(u_1) = f \circ f(u_0) \quad \text{etc...}$

• Si  $D \neq \mathbb{R}$ , on peut avoir à justifier l'existence de la suite.

• On peut étudier rapidement la fonction  $f$  pour trouver des intervalles stables par  $f$ . Pour cela il peut être utile de chercher les points fixes de  $f$  en résolvant  $f(x) = x$  et de reporter ces points dans le tableau de variations de  $f$ .

Si  $I$  est stable par  $f$  avec  $u_0 \in I$  alors on a par récurrence immédiate,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  existe et  $u_n \in I$ .

- Si  $f$  est croissante sur  $I$  avec  $I$  stable par  $f$ , on peut prouver par récurrence que  $(u_n)$  est monotone et on peut utiliser le théorème de convergence monotone.  
Le sens de variation de  $u$  dépend du signe de  $u_0 - u_1$  et peut donc dépendre de la valeur de  $u_0$ .
- Si on montre que  $(u_n)$  converge et si  $f$  est continue alors la limite  $L$  de la suite est un point fixe de  $f$ . Par conséquent si  $f$ , continue, n'admet pas de point fixe,  $u$  diverge.
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$  avec  $I$  stable par  $f$ , on peut prouver que  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones de monotonies contraires en utilisant la croissance de  $g = f \circ f$ .  
On regarde ensuite si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ont même limite ou non.  
Si ces deux suites convergent avec  $f$  continue alors leurs limites sont des points fixes de  $g$ .
- On peut penser à étudier le signe de  $f(x) - x$  (dont les zéros sont les points fixes de  $f$ ) pour comparer  $u_0$  et  $u_1$  ou pour donner directement le sens de variation de  $u$ .
- Si  $f$  n'a qu'un seul point fixe  $\alpha$  sur  $I$ , on peut regarder si  $f$  est contractante en observant les valeurs de sa dérivée sur  $I$ , et on montre proprement que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$ , à l'aide des inégalités des accroissements finis. Cela évite l'étude de la monotonie de la suite.
- Lorsque c'est possible, il est toujours bon de faire un dessin pour voir ce qui se passe.

## Exercices

① Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$   $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Trouver  $C \in ]0, 1[$  tel que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$

2. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

3. Montrer que  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \alpha$ .

② Etudier la convergence de la suite définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$$

Ce résultat dépend-t-il du choix de  $u_0$  ?

③ On considère la suite réelle définie par  $a_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$ .

### ④ Approfondissement

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  avec  $I$  stable par  $f$ .

On suppose que  $f$  admet un point fixe  $\alpha \in I$  tel que  $\alpha$  ne soit pas une extrémité de  $I$  et  $|f'(\alpha)| > 1$ .

Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$  si et seulement si  $(u_n)$  est stationnaire en  $\alpha$ .

On dit que  $\alpha$  est un point fixe répulsif de  $f$ .