

Programme de colles-semaine 20 -16/03 au 20/03

I. Dérivabilité d'une fonction numérique (semaine 19)

II. Polynômes.

- Définition, degré, vocabulaire
 - Somme et multiplication par un scalaire, degré de $P + Q$ et de λP .
 - Produit de deux polynômes, définition et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
 - Ecriture formelle, règles de calcul : associativité, élément neutre, commutativité, loi intègre, distributivité, binôme, Bernoulli.
 - Fonction polynomiale associée, évaluation en un scalaire, polynôme de matrice
 - Composition de deux polynômes, exemples usuels.
 - $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un K-EV de dimension infinie, toute famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$. Les polynômes de degré au plus n forme un SEV de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $(n + 1)$ noté $\mathbb{K}_n[X]$ et sa base canonique est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$
 - Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, théorème de division euclidienne, algorithme et justification.
 - Dérivation: polynôme dérivé, propriétés de calcul,
-

Déroulement de la colle:

- ① Un calcul de dérivée nième parmi ceux proposés en bas de page ou sur le même modèle
 - ② Une question de cours parmi
 - Enoncé et démonstration du théorème des accroissements finis à illustrer graphiquement
 - Définition d'une fonction convexe à illustrer graphiquement, énoncer le lemme des trois pentes et justifier l'une des trois inégalités du cours.
 - Preuve de toute famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
 - ③ Etude plus ou moins guidée d'une suite récurrente.
 - ④ Exercices sur les polynômes en lien avec le début du cours
Pas racines, ni de factorisation.
-

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Calculs de la semaine : Donner les dérivées nièmes des fonctions suivantes

$$f(x) = e^{2x}(x^2 - 3x + 1) \quad g(x) = \sin x \cdot e^x \quad f_n(x) = x^2(1 + x)^n \quad g_n(x) = x^{n-1} \cdot \ln(x)$$

(Exercice 15.7)

Dérivées nièmes des fonctions usuelles à connaître

$f(x)$	$f^{(k)}(x)$	commentaires
x^α Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$	$\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)x^{\alpha - k}$ $\begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$	Par suite si f une fonction polynômiale de degré p alors pour tout $k \leq n$, $f^{(k)}$ est une fonction polynômiale de degré $n - k$ et pour tout $k > n$, $f^{(k)} = 0$.
$e^{\alpha x}$	$\alpha^k e^{\alpha x}$	α est un réel ou un complexe.
$\cos(x)$	$\cos(x + k \frac{\pi}{2})$	
$\sin(x)$	$\sin(x + k \frac{\pi}{2})$	
$\frac{1}{x - a}$	$(-1)^k \frac{k!}{(x - a)^{k+1}}$	
$\ln x - a $	$(-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(x - a)^k}$	$k \geq 1$
$u(ax+b)$	$a^k \cdot u^{(k)}(ax+b)$	Avec u de classe C^k