

Chapitre 17 - Comparaison locale de fonctions, développements limités.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, a un réel de I ou une borne de I donc éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Comparaisons locales de fonctions

1.1. Domination et négligeabilité en a :

Déf: Soit f et g définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g)$ lorsqu'il existe une

fonction B définie au voisinage de a telle que: $\begin{cases} B \text{ est bornée} \\ f(x) = B(x)g(x) \end{cases}$ sur ce voisinage

- On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ lorsqu'il existe une

fonction ε définie au voisinage de a telle que: $\begin{cases} \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ f(x) = \varepsilon(x)g(x) \end{cases}$ sur ce voisinage.

★ Autres notations :

$f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g)$ peut se remplacer par $f \underset{a}{=} O(g)$, voire $f = O(g)$ si il n'y a pas d'ambiguïté.

$f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g)$ se note aussi $f \underset{a}{=} o(g)$ voire $f = o(g)$ si il n'y a pas d'ambiguïté ou encore $f \ll_{x \rightarrow a} g$

NB: En physique, $|X| \ll 1$ signifie que $|X| \rightarrow 0$

★ Dans la pratique: Si g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a et si dans ce cas $g(a) = f(a) = 0$, on utilise les caractérisations suivantes:

$$f \underset{x \rightarrow a}{=} O(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

$$f \underset{x \rightarrow a}{=} o(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Exemples :

★ Conséquences immédiates des définitions:

- Si $f = o(g)$, alors $f = O(g)$

$$\begin{matrix} x \rightarrow a & & x \rightarrow a \end{matrix}$$
- $f = O(1)$ signifie que f bornée au voisinage de a .

$$x \rightarrow a$$
- $f = o(1)$ signifie que f tend vers 0 en a .

$$x \rightarrow a$$

⚠ **Attention :** Il ne s'agit pas ici de vraies égalités mais de relation d'appartenance :

$$x = o(e^x) \text{ et } x^2 = o(e^x) \text{ mais } x \neq x^2.$$

$$\begin{matrix} x \rightarrow +\infty & & x \rightarrow +\infty \end{matrix}$$

Proposition 17.1 : Comparaison des fonctions usuelles

Soit α, β et a trois réels.

① Comparaison en $+\infty$:

$$\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 0, (\ln(x))^\alpha = o(x^\beta) \text{ et } x^\alpha = o(e^{\beta x})$$

$$\begin{matrix} x \rightarrow +\infty & & x \rightarrow +\infty \end{matrix}$$

$$\text{Si } \alpha < \beta, x^\alpha = o(x^\beta).$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } a > 1, \text{ et } x^\beta = o(a^x)$$

$$x \rightarrow +\infty$$

② Comparaison en 0 (se déduit de ① en posant $X = 1/x$)

$$\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 0, |\ln(x)|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\text{Si } \alpha < \beta, x^\beta = o(x^\alpha)$$

$$x \rightarrow 0$$

③ Comparaison en $-\infty$ (se déduit de ① en posant $X = -x$)

$$\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > 0, e^{\beta x} = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } a > 1, a^x = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

$$x \rightarrow -\infty$$

Démo: On utilise la caractérisation par la limite du quotient (chapitre 3)

Les résultats du ① (et par corollaire ceux de ② et ③) sont appelés résultats de croissances comparées, on peut retenir que si $0 < \alpha < \beta$ et $1 < a < b$, on a

$$f \text{ bornée} \ll_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x))^\alpha \ll_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ll_{x \rightarrow +\infty} x^\beta \ll_{x \rightarrow +\infty} a^x \ll_{x \rightarrow +\infty} b^x$$

$$\text{En particulier } \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} = o(x^n) \text{ et } x^n = o(x^{n+1})$$

$$\begin{matrix} x \rightarrow 0 & & x \rightarrow +\infty \end{matrix}$$

★ Dans la pratique : on utilise la proposition 17.1 pour comparer $f(x)$ et x^α ou $f(x)$ et $\frac{1}{x^\alpha}$

$$f(x) = o(x^\alpha) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$x \rightarrow a$$

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \Leftrightarrow x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$x \rightarrow a$$

✎ Exercice 17.1

Proposition 17.2 : Soit f, g, h, k définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- ① Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ alors $f = O(h)$
 $\quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$
- ② Si $f = O(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$
 $\quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$
- ③ Si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$
 $\quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$

Démo : cf chapitre 9

★ Dans la pratique : Si $f = o(\lambda x^\alpha)$ avec $\lambda \neq 0$ alors $f = o(x^\alpha)$ car $(\lambda x^\alpha) = O(x^\alpha)$
 $\quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$

Proposition 17.3 : Compatibilité avec les opérations

- ① Linéarité: si $f = o(h)$ et si $g = o(h)$ alors $\alpha f + \beta g = o(h)$
 $\quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$
- ② Produit:
- Si $f = o(g)$ alors $f.h = o(g.h)$
 $\quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$
 - Si $f = o(h)$ et $g = o(k)$ alors on a $f.g = o(h.k)$
 $\quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$
- ③ Substitution : Soit $u : J \rightarrow I$, $b \in J$ ou borne de J .
 Si $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a$ et si $f = o(g)$ alors $f \circ u = o(g \circ u)$
 $\quad \quad \quad x \rightarrow b \quad \quad \quad x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow b$

Ces relations restent vraies pour la relation de domination

Démo : ① et ② cf chapitre 9

✎ Preuve de ③

✎ Exemples :

1.2. Fonctions équivalentes

Déf: Soit f et g définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f \underset{x \rightarrow a}{\sim} g$ lorsqu'il existe une

fonction φ définie au voisinage de a telle que
$$\begin{cases} \varphi(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1 \\ f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ sur ce voisinage} \end{cases}$$

★ Conséquences immédiates des définitions:

- Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{a}{\sim} \ell \Leftrightarrow f \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell$
- $f \underset{a}{\sim} 0$ signifie que f est identiquement nulle au voisinage de 0 et pas que $f \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$.

★ Dans la pratique : Si g ne s'annule pas au voisinage de a , sauf peut-être en a et si dans ce cas $g(a) = f(a) = 0$, on utilise les caractérisations suivantes:

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow (f - g) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow f \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} g + o(g) \quad \text{et} \quad f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \frac{f}{g} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1$$

Proposition 17.4 : Soit f, g, h trois fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

- ① Réflexivité: $f \underset{a}{\sim} f$
- ② Symétrie: Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$
- ③ Transitivité: Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

✎ Preuve de ③

♥ Equivalents usuels en 0

$$\begin{aligned} e^h &\underset{0}{\sim} 1 & (e^h - 1) &\underset{0}{\sim} h & \ln(1+h) &\underset{0}{\sim} h \\ (1+h)^\alpha &\underset{0}{\sim} 1 + \alpha h & \text{en particulier pour } \alpha = \frac{1}{2}, \text{ on a } & (\sqrt{1+h} - 1) &\underset{0}{\sim} \frac{1}{2}h \\ \cos(h) &\underset{0}{\sim} 1 & \sin(h) &\underset{0}{\sim} h & \tan(h) &\underset{0}{\sim} h & (\cos(h) - 1) &\underset{0}{\sim} -\frac{h^2}{2} \quad (*) \\ \arccos(h) &\underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2} & \arcsin(h) &\underset{0}{\sim} h & \arctan(h) &\underset{0}{\sim} h \\ \operatorname{ch}(h) &\underset{0}{\sim} 1 & \operatorname{sh}(h) &\underset{0}{\sim} h & \operatorname{th}(h) &\underset{0}{\sim} h \end{aligned}$$

Il faut connaître ces résultats et pouvoir les justifier comme vu au chapitre 9

♥ Equivalents d'une fonction polynomiale : Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_p x^p$ avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$

$$\text{on a } P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n \quad \text{et} \quad P(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$$

✎ Preuve :

Proposition 17.5 : Règle de calculs sur les équivalents: Soit f, g, h et k de $I \rightarrow \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

- ① Produit d'équivalents: Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$ alors $fg \underset{a}{\sim} hk$
- ② Puissance: Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors, sous réserve d'existence, $f(x)^\alpha \underset{a}{\sim} g(x)^\alpha$
- ③ Quotient d'équivalents: Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$ alors, sous réserve d'existence $f/g \underset{a}{\sim} h/k$
- ④ Substitution: Soit $u : J \rightarrow I$, $b \in J$ ou borne de I .
Si $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a$ et si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \circ u \underset{b}{\sim} g \circ u$

Preuve : On calcule la limite du quotient

④

ATTENTION PAS DE SOMME (ni de différence, même une constante...)

Comment faire si on doit donner un équivalent d'une somme?

- On cherche le terme prépondérant pour écrire $S(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$.
- On cherche à factoriser la somme pour utiliser les règles de calcul

Attention: Sauf exception, la composition à gauche n'est pas compatible avec les relations de comparaison : $u(x) \underset{a}{\sim} v(x)$ n'implique pas $f(u(x)) \underset{a}{\sim} f(v(x))$

Proposition 17.6 : Soit f, g, h, k quatre fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

Si $k(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et $h \underset{a}{\sim} f$ et $k \underset{a}{\sim} f$ alors $g \underset{a}{\sim} f$

Preuve :

Exercice 17.3 et 17.4

★ Méthode classique: Les équivalents usuels sont en 0, on pourra s'y ramener en posant:

- $x = a + h$ pour la recherche d'un équivalent en a réel
- $x = \frac{1}{h}$ pour la recherche d'un équivalent en $a = \pm \infty$

Exercice 17.5 et 17.9

1.3 Propriétés conservées par équivalents**Proposition 17.7:**

- ① Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g sont de même signe au voisinage de a
- ② Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f = \ell$

✎ Exercices résolus :

① On pose $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$, préciser la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f ainsi que sa position relative au voisinage de $+\infty$.

② On définit g sur par $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \frac{\tan x \cdot \ln(1+x)}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Peut-on prolonger g par continuité en 0 ?

2. Développement limité d'ordre n en a.

2.1. Présentation et définition:

Déf: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ avec $0 \in I$ ou 0 est une borne de I .

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0, noté $DL_n(0)$, lorsqu'il existe un

polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k = o(x^n)_{x \rightarrow 0}$.

Le $DL_n(0)$ de f est : $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k x^k}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{Reste d'ordre } n}$

Remarques :

- L'ordre du DL est donné par l'exposant de x dans le reste et pas par le degré de la partie régulière.
- Toute fonction polynomiale f de degré p admet pour tout $n \geq p$, un DL d'ordre n en 0 de partie régulière $f(x)$ et de reste 0.

Exemple 1: $f: x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un DL à tout ordre en 0 de partie régulière $1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

ou encore: $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)_{x \rightarrow 0}$ ♥

Proposition 17.8 : Propriétés des $DL_n(0)$:

- ① Si f admet un $DL_n(0)$, sa partie régulière est unique et on peut donc parler **du** $DL_n(0)$ de f .
- ② Si f admet un $DL_n(0)$ tel que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on peut substituer λx^p à x pour obtenir: $f(\lambda x^p) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(\lambda x^p) + o(x^{np})$
- ③ Si f est paire (resp. impaire) et admet un $DL_n(0)$ alors la partie régulière est paire (resp. impaire).

✎ Preuve :

✎ En substituant $-x$ à x puis x^2 à x dans l'exemple 1, on obtient :

$$\frac{1}{1+x^0} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Déf: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ et a un réel de I ou une borne de I .

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a , noté $DL_n(a)$, lorsqu'il existe un

polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k = o((x-a)^n)$ $_{x \rightarrow a}$.

Le $DL_n(a)$ de f est: $f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{Reste d'ordre } n}$

★ Remarques:

- Par convention, on écrit les termes du DL_n dans l'ordre croissant des puissances de x de sorte que chaque terme est négligeable devant ceux écrits à sa gauche au voisinage de a .

- On ne développe pas les $(x-a)^k$ dans l'écriture du $DL_n(a)$

★ Dans la pratique: f admet un $DL_n(a)$ ssi $g: h \rightarrow f(a+h)$ admet un $DL_n(0)$.

On se ramènera systématiquement en 0 par le changement de variable $x = a + h$

☞ Donner le $DL_3(1)$ de $f: x \rightarrow \frac{1}{2-x}$

Proposition 17.9 : Propriétés des $DL_n(a)$:

① Si f admet un $DL_n(a)$, sa partie régulière est unique et on peut donc parler du $DL_n(a)$ de f .

② Si f admet un $DL_n(a)$, alors pour tout entier $p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$ que l'on obtient en tronquant le $DL_n(a)$ à l'ordre p , c'est à dire

Si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ alors $\forall p \in \mathbb{N}, p \leq n, f(x) = \sum_{k=0}^p a_k (x-a)^k + o((x-a)^p)$

☞ En admettant que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donner le $DL_3(1)$ de $\exp$ puis son $DL_2(1)$

2.2. Liens avec la dérivation

Théorème 17.1 : Soit f définie sur I , sauf peut-être en a .

① f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f admet une limite finie en a .

Donc • si f est définie en a et admet un $DL_0(a)$ alors f est continue en a

• si f n'est pas définie en a et admet un $DL_0(a)$ alors f est prolongeable par continuité en a

Dans les deux cas, on a : $f(x) = f(a) + o(1)$

② Soit f définie en a , f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f , ou son prolongement par continuité en a , est dérivable en a et dans ce cas, on a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$

⚡ Attention : Si une fonction admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 2$, elle n'est pas nécessairement n fois dérivable en a

Preuve :

Théorème 17.2: formule de Taylor-Young

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors f possède un DL_n en tout réel a de I donné par:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o((x-a)^n) \end{aligned}$$

ou encore, en posant $x = a + h$: $f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$

🔗 Applications: DL_n des fonctions usuelles en 0

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

✍ Il faut savoir donner rapidement le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Remarque : dans la pratique, on utilise peu cette formule pour obtenir le DL_n , on procède plutôt par opérations, on l'utilise pour justifier l'existence d'un $DL_n(a)$ pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$

2.3. Opérations sur les développements limités

Les résultats de cette partie sont énoncés pour les $DL_n(0)$ mais ils s'étendent aisément aux $DL_n(a)$ en posant $x = a + h$

Proposition 17.10: Linéarité et produit

Si f et g admettent un $DL_n(0)$ ayant pour partie régulière respectives P et Q alors

- ① $\alpha f + \beta g$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\alpha P + \beta Q$.
- ② fg admet un $DL_n(0)$ de partie régulière R obtenue en tronquant au degré n le produit PQ .

Applications:

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \text{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Exemple: $DL_4(0)$ de $f(x) = e^x \times \sin x$

Proposition 17.11: Composition

Soit f et g définies au voisinage de 0 et admettant des $DL_n(0)$ de partie régulière P et Q .

Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ alors $(g \circ f)$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière R obtenue en tronquant au degré n le polynôme $Q \circ P$.

➤ Exemple: $DL_4(0)$ de $f(x) = e^{\sin x}$

Corollaire: Inverse, quotient

Si f admet un $DL_n(0)$ et est telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$, obtenu en

écrivant $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a(1 \pm g(x))} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1 \pm g(x)}$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

➤ Applications: $\tan(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \quad \heartsuit$

Proposition 17.12 Intégration

Si f est continue sur I contenant 0, et admet un $DL_n(0)$ alors toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenue en intégrant terme à terme le $DL_n(0)$ de f sans oublier de rajouter le terme constant $F(0)$. C'est à dire:

$$\text{Si } f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \text{ alors } F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$$

✎ Applications:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1) + x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \\ \ln(1-x) &= \ln(1) - x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \\ \arctan(x) &= \underbrace{\arctan(0)}_0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

et également les DL_n de $\arccos$ et $\arcsin$, (ordre 3 ou 4)

✎ On ne dérive à priori pas les DL mais si f admet un $DL_n(0)$ et si on sait que f' admet un $DL_{n-1}(0)$ alors on peut l'obtenir en dérivant terme à terme le $DL_n(0)$ de f . C'est le cas quand f est de classe $\mathcal{C}^n$ et à fortiori de classe $\mathcal{C}^\infty$, votre professeur de physique pourra donc le faire...

2.4 Applications des développements limités

① Recherche d'équivalents et calculs de limite

Proposition 17.13 : Si f admet un $DL_n(a)$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k=p}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) = a_p (x-a)^p + \cdots a_n (x-a)^n + o((x-a)^n) \text{ avec } a_p \neq 0.$$

alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p (x-a)^p$

🔗 Applications: Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{\tan^2 x - x^2}$

② Etude locale de f en a

Proposition 17.14 : Si f admet un $DL_p(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \text{ avec } p \geq 2 \text{ et } a_p \neq 0.$$

alors

- f est continue en a ou prolongeable par continuité en a avec $f(a) = a_0$
- f ou f prolongée est dérivable en a avec $f'(a) = a_1$
- la position relative de C_f et de sa tangente en $(a, f(a))$ au voisinage de a, est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$

🔪 Applications: On considère $f : x \mapsto \frac{1}{x^{x-1}}$. Montrer que f admet un $DL_2(1)$, le calculer et en déduire l'étude locale de f en 1

③ Extremum

Proposition 17.15 : Soit f admettant un $DL_p(a)$ de la forme

$$f(x) = f(a) + a_p (x-a)^p + o((x-a)^p) \text{ avec } p \geq 2 \text{ et } a_p \neq 0.$$

Si p est pair, f admet un extremum local en a .

Si p est impair, $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de C_f

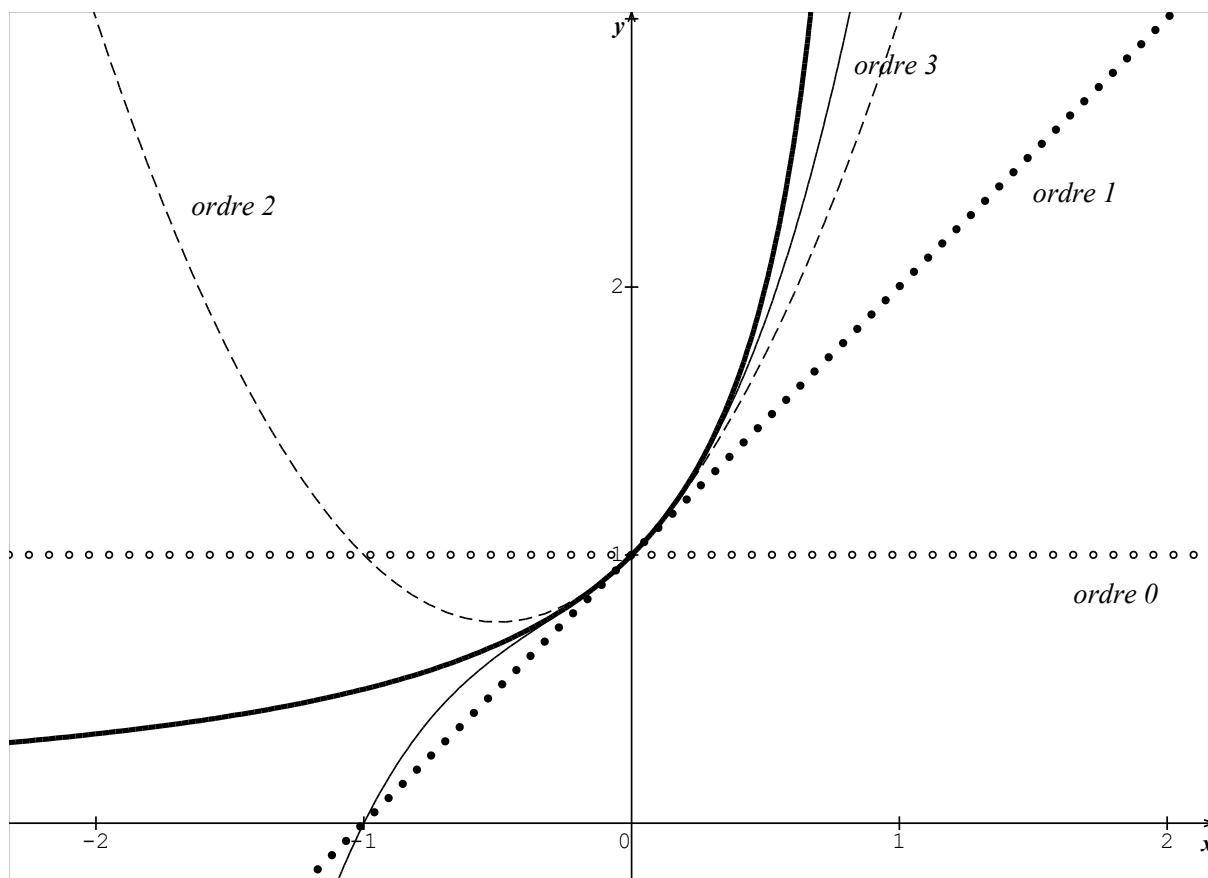
☞ Applications: On considère f de classe C^2 sur $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$.

a. On suppose que $f(x_0)$ est un extremum local de f , donner le $DL_2(x_0)$ de f .

b. Montrer que si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) \neq 0$ alors f admet un extremum local en x_0 .

Annexes :

Graphique 1: DL en 0 de $f: x \mapsto \frac{1}{1-x}$



Graphique 2: DL en 0 de $f: x \mapsto \cos x$

