

## Programme de colles-semaine 23 -06/04 au 10/04

---

### Analyse asymptotique

- Domination et négligeabilité en  $a$ , caractérisation par le quotient, propriétés, compatibilité avec les opérations, comparaison des fonctions usuelles.
- Fonctions équivalentes en  $a$ , caractérisation par le quotient, propriétés, équivalents usuels, règles de calcul : produit, exponentiation, quotient, substitution, exemples de recherche d'un équivalent simple pour une somme.
- Propriétés conservées par équivalents : recherche de limite en  $a$  et signe au voisinage de  $a$ .
- Définition de  $f$  admet un DL d'ordre  $n$  en  $0$ , exemple fondamental :  $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n)$ ,

unicité, troncature, substitution, parité,  $DL_n(0)$  de  $\frac{1}{1+x}$  et  $DL_{2n}(0)$  de  $\frac{1}{1+x^2}$ .

- Définition de  $f$  admet un DL d'ordre  $n$  en  $a$ . On se ramène systématiquement à un  $DL_n(0)$  en posant  $x = a+h$ .
- Soit  $f$  définie au voisinage de  $a$ ,  $f$  est continue en  $a$  ou prolongeable par continuité en  $a$  ssi  $f$  admet un  $DL_0(a)$  et  $f$  (ou  $f$  prolongée) est dérivable en  $a$  ssi  $f$  admet un  $DL_1(a)$ .
- Formule de Taylor-Young (admis ici), DL à tout ordre en  $0$  de  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$  et  $(1+x)^\alpha$ , cas particulier usuels :

$DL_3(0)$  de  $\sqrt{1+x}$  et  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$  en  $0$ .

- Combinaison linéaire et produit de DL, DL en  $0$  de  $\cosh$  et  $\sinh$ .
  - Composition de  $DL_n(0)$ , application au DL de l'inverse d'une fonction admettant un  $DL_n(0)$  avec  $a_0 \neq 0$ ,  $DL_5(0)$  de  $\tan$ .
  - Intégration,  $DL_n(0)$  de  $\ln(1+x)$  et  $\arctan(x)$ .
  - Utilisation des DL pour la recherche d'un équivalent simple, pour le calcul d'une limite, pour une étude locale, pour une étude de branches infinies, pour un développement asymptotique de  $u_n$ .
- 

### Déroulement de la colle:

① Calcul d'une primitive, d'un intégrale d'une somme ou encore d'une dérivée nième nécessitant la décomposition d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé à racines simples

Vu en cours :

$$I = \int_0^1 \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x + 2} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad \text{dérivée nième de } f: x \mapsto \frac{x^2 + 5}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

② Une question de cours parmi

- Equivalents usuels.
- Enoncer la formule de Taylor-Young avec toutes ses hypothèses et l'appliquer pour obtenir le  $DL_3(0)$  de  $\sqrt{1+x}$  ou de  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
- Donner rapidement le  $DL_5(0)$  de  $\tan(x)$  par la méthode de son choix.

③ Exercice(s) d'analyse nécessitant le calcul de  $DL_n(0)$  Feuille d'entraînement en page 2  
 Limite, prolongement, dérivabilité, caractère  $\mathcal{C}^1$ , branche infinie .....

---

**Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10**

## Entraînement aux calcul de DL

1. Calculer le  $DL_3(0)$  de  $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
2. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto (e^x - 1)^2$
3. Calculer le  $DL_{10}(0)$  de  $f : x \mapsto x^2(\operatorname{ch}x - \cos x)^2$
4. Calculer le  $DL_5(0)$  de  $f : x \mapsto e^x \arctan(x)$
5. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2}$
6. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto (\cos x)^3$
7. Calculer le  $DL_3(0)$  de  $f : x \mapsto e^{\sin x}$
8. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto e^{\cos x}$
9. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto \cos(\tan x)$
10. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

## Réponses :

1.  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$
2.  $f(x) = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$
3.  $f(x) = x^6 + \frac{1}{180}x^{10} + o(x^{10})$
4.  $f(x) = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$
5.  $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^4 + o(x^4)$
6.  $f(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + o(x^4)$
7.  $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
8.  $f(x) = e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4\right) + o(x^4)$
9.  $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)$
10.  $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$