Programme de colles-semaine 23 -06/04 au 10/04

Analyse asymptotique

• Domination et négligeabilité en a, caractérisation par le quotient, propriétés, compatibilité avec les opérations, comparaison des fonctions usuelles.
• Fonctions équivalentes en a, caractérisation par le quotient, propriétés, équivalents usuels, règles de calcul : produit, exponentiation, quotient, substitution, exemples de recherche d'un équivalent simple pour une somme.
• Propriétés conservées par équivalents : recherche de limite en a et signe au voisinage de a.
• Définition de f admet un DL d'ordre n en 0, exemple fondamental : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+..+x^n+o\ (x^n)$,

unicité, troncature, substitution, parité, $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ et $DL_{2n}(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$.
• Définition de f admet un DL d'ordre n en a. On se ramène systématiquement à un $DL_n(0)$ en posant x = a +h.
• Soit f définie au voisinage de a, f est continue en a ou prolongeable par continuité en a ssi f admet un $DL_0(a)$ et f (ou f prolongée) est dérivable en a ssi f admet un $DL_1(a)$.
• Formule de Taylor-Young (admis ici), DL à tout ordre en 0 de exp, cos, sin et $(1+x)^\alpha$, cas particulier usuels :

$DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ en 0.
•·Combinaison linaire et produit de DL, DL en 0 de ch et sh.
• Composition de $DL_n(0)$, application au DL de l'inverse d'une fonction admettant un $DL_n(0)$ avec $a_0\neq 0$, $DL_5(0)$ de tan.
• Intégration, $DL_n(0)$ de ln(1 + x) et arctan(x).
• Utilisation des DL pour la recherche d'un équivalent simple, pour le calcul d'une limite, pour une étude locale, pour une étude de branches infinies, pour un développement asymptotique de u_n.

Déroulement de la colle:

① Calcul d'une primitive, d'un intégrale d'une somme ou encore d'une dérivée nième nécessitant la décomposition d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé à racines simples

Vu en cours :

$I=\int_0^1 \frac{x^3-1}{x^2+3x+2}$ $\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ $\qquad$ dérivée nième de $f : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-3x^2+2x}$

② Une question de cours parmi

- Equivalents usuels.
- Enoncer la formule de Taylor-Young avec toutes ses hypothèses et l'appliquer pour obtenir le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ ou de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
- Donner rapidement le $DL_5(0)$ de tan(x) par la méthode de son choix.

③ Exercice(s) d'analyse nécessitant l'utilisation des relations de comparaison ou le calcul d'un DL
Limite, prolongement, dérivabilité, caractère $\mathcal{C}^1$, branche infinie .....

Feuille d'entraînement en page 2

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Entraînement aux calcul de DL

1. Calculer le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$

2. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \left(e^x - 1\right)^2$

3. Calculer le $DL_{10}(0)$ de $f : x \mapsto x^2(\mathrm{ch}x - \cos x)^2$

4. Calculer le $DL_5(0)$ de $f : x \mapsto e^x \arctan(x)$

5. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$

6. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \left(\cos x\right)^3$

7. Calculer le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto e^{\sin x}$

8. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto e^{\cos x}$

9. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \cos(\tan x)$

10. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

Réponses :

1. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{1}{48}x^3 + o(x^3)$

2. $f(x) = x^2 + x^3 + \dfrac{7}{12}x^4 + o(x^4)$

3. $f(x) = x^6 + \dfrac{1}{180}x^{10} + o(x^{10})$

4. $f(x) = x + x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{3}{40}x^5 + o(x^5)$

5. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{45}x^4 + o(x^4)$

6. $f(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{7}{8}x^4 + o(x^4)$

7. $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

8. $f(x) = e\left(1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^4\right) + o(x^4)$

9. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{7}{24}x^4 + o(x^4)$

10. $f(x) = -\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{180}x^4 + o(x^4)$