

Exercices : Chapitre 18 - Applications linéaires

♥ A savoir refaire - ♦ Éléments de correction en ligne

Exemples d'applications linéaires

♥ 18.1 Dire si $f : E \rightarrow F$ est linéaire dans les cas suivants :

- $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$ et $f:(x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 0)$
- $E = F = \mathbb{R}^3$ et $f:(x,y,z) \mapsto (x^2+x, y-z, x+y-z)$
- $E = F = \mathbb{R}^2$ et $f:(x,y) \mapsto (1, x-2y)$
- $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}$ et $f:(x,y,z) \mapsto x-y+z$
- $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ et $f:(x,y) \mapsto xy$
- $E = F = \mathbb{C}[X]$ et $f:P \mapsto P + (X^2+1)P'$
- $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathbb{R}$ et $f : P \mapsto P(a)$ avec a réel fixé.
- $E = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$ et $f:z \mapsto \operatorname{Re}(z)$
- $E = \{\text{suites réelles convergentes}\}$, $F = \mathbb{R}$ et $f : (u_n) \mapsto \lim u_n$

♦ 18.2 On considère les applications linéaires suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x+2y, y, y+z) \end{cases}, \quad g: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x+y+z \end{cases}, \quad h: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}.$$

- Préciser lesquelles sont des endomorphismes, des formes linéaires.
- Déterminer gof . Quelle est sa nature ?
- Montrer que f est un automorphisme et expliciter f^{-1} .
- Déterminer $h^2 = h \circ h$, puis $h^n = h \circ h \circ \dots \circ h$ où $n \in \mathbb{N}$.

♥ 18.3 Les applications suivantes sont linéaires, pour chacune, déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ et dire ce que l'on peut en déduire.

- $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$ et $f:(x,y) \mapsto (x+y, x-y, x+y)$
- $E = F = \mathbb{R}^3$ et $f(x,y,z) = (2x-y+2z, x-3y-z, 4x-7y)$
- $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f:u \mapsto u'$
- $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(u)(x) = \int_0^x u(t) dt$

18.4 Déterminer unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 0, 1) = (-1, 0)$ et $f(1, 1, 1) = (0, 2)$. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.♥ 18.5 **Trace d'une matrice carrée** Soit M une matrice carrée on appelle trace de M et on note $\operatorname{Tr}(M)$ la somme de ses éléments diagonaux.

- Montrer que $M \mapsto \operatorname{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Justifier que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{Tr}(M) = 0\}$ est une SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Montrer que $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr}(MN) = \operatorname{Tr}(NM)$
- Existe-t-il un couple de matrices carrées (A, B) tel que $AB - BA = I_n$?

♥ 18.6 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ définie sur E par $\varphi(P) = (X^2 - X - 1)P' - (2X - 1)P$.

- Justifier que φ est un endomorphisme de E .
- Donner une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi)$

♦ 18.7 **Dérivation discrète**Soit $f: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer $\operatorname{Ker} f$.

Endomorphismes d'un espace vectoriel :

Rappel: Dans $\mathcal{L}(E)$ on note $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (f itérée n fois)

18.8. Démontrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$\text{Ker} f = \text{Ker} f^2 \Leftrightarrow \text{Im} f \cap \text{Ker} f = \{\overline{0}_E\} \quad \text{et} \quad \text{Im} f = \text{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \text{Im} f + \text{Ker} f.$$

♥ **18.9** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0$

a. Justifier que $f \in \text{GL}(E)$ et préciser f^{-1} .

b. Démontrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ sont des SEV supplémentaires de E .

♥ **18.10** Soit f et g deux endomorphismes qui commutent dans $\mathcal{L}(E)$.

Montrer que $f(\text{Ker } g) \subset \text{Ker } g$ et que $f(\text{Im } g) \subset \text{Im } g$

On dit que $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$ sont stables par f .

♦ **18.11** Soit f et g deux endomorphismes de E vérifiant $f \circ g = \text{Id}_E$.

a. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker} f$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im} g$.

b. Montrer que $\text{Ker} f$ et $\text{Im} g$ sont supplémentaires dans E .

c. A quelle condition sur f peut-on affirmer que f et $g \in \text{GL}(E)$ et $g = f^{-1}$?

18.12 Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout x de E , x et $f(x)$ sont colinéaires c'est à dire tel que $\forall x \in E, \exists \lambda_x, f(x) = \lambda_x \cdot x$

a. Soit x et y deux vecteurs de E non nuls et colinéaires, montrer que $\lambda_y = \lambda_x$

b. Etablir cette égalité dans le cas où (x, y) est libre.

c. Montrer que f est une homothétie.

18.13 On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de $\mathcal{L}(E)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^5 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $g = \text{Id}_E - f$ et $h = \text{Id}_E + f \in \text{GL}(E)$ et exprimer g^{-1} et h^{-1} en fonction de $f^k, k \in \mathbb{N}$.

Projecteurs et symétries

♥ **18.14** Soit $E = \mathbb{R}^3, F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 3z = 0 \}$ et $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y - z = 0 \text{ et } 2x + z = 0 \}$

a. Démontrer que $E = F \oplus G$.

b. Soit f la projection sur F parallèlement à G déterminer $f(1, 2, 0)$, puis $f(x, y, z)$

c. Donner l'expression de la symétrie par rapport à G parallèlement à F .

18.15 On a vu que $F = \{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \int_0^1 f(t) dt = 0 \}$, G le SEV des fonctions constantes sur \mathbb{R} étaient supplémentaires dans $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (exercice 16.8)

Déterminer la projection de la fonction exponentielle sur F parallèlement à G .

♦ **18.16** Dans \mathbb{R}^2 on note $D_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 3y \}$ et $D_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0 \}$

a. Montrer que $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$

b. Donner l'expression de la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 .

♥ **18.17** Soit $E = \mathbb{K}[X]$, on considère l'application f qui à tout polynôme P associe son reste dans la division euclidienne par $X^2 + 1$.

Montrer que f est un projecteur de E puis déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.

♥ **18.18** Soit $p: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x-z}{2}, 0, \frac{-x+z}{2} \right) \end{cases}$, on note $I_3 = \text{Id}_E$ avec $E = \mathbb{R}^3$.

a. Montrer que p est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.

b. On pose $q = I_3 - p$, déterminer $p \circ q$ et $q \circ p$

c. On donne $g = p + 2I_3$. Exprimer $g^n = g \circ g \circ \dots \circ g$ en fonction de p et q pour tout entier $n \geq 1$.

♦ **18.19** Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$(f \circ g = f \text{ et } g \circ f = g) \Leftrightarrow (f \text{ et } g \text{ sont deux projecteurs de même noyau})$

Applications linéaires en dimension finie

♥ 18.20 On donne $f: \begin{cases} \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3x - y + z, x - 3y - z, x + 5y + 3z) \end{cases}$

Déterminer le rang de f et préciser une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.

Que peut-on en déduire concernant f ?

♥ 18.21 Soit f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = (1 + X^2)P(2) + (X + 1)P'(1)$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer son rang.

♥ 18.22 Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E espace vectoriel de dimension 3.

Soit f l'unique endomorphisme de E vérifiant : $f(e_1) = e_2 - e_3, f(e_2) = e_3 - e_1$ et $f(e_3) = e_1 - e_2$.

a. Déterminer le rang de f .

b. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

c. f est-il un projecteur de E ?

18.23 Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui, à tout polynôme P associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X).$$

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer son noyau, son rang et son image.

b. Soit $Q \in \text{Im } f$. Prouver que Q admet par f un unique antécédent P tel que $P(0) = P'(0) = 0$.

♦ 18.24 Soit f un endomorphisme de E de dimension finie n .

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires dans E (ii) $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ (iii) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$

18.25 Endomorphismes nilpotents

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent de E d'ordre $p, p \geq 2$.

a. Dans cette question, $n = 3$ et $p = 2$, déterminer le rang de f .

b. Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \neq 0_E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.

Montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre dans E . Comparer n et p .

♦ 18.26 Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$.

a. Montrer que : $|\text{rg } f - \text{rg } g| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g$.

b. Montrer que : $\text{rg}(f + g) = \text{rg } f + \text{rg } g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\} \\ \text{Ker } f + \text{Ker } g = E \end{cases}$

18.27 Exemple d'hyperplan

Justifier que les ensembles ci-dessous sont des hyperplans et en donner une équation

a. $F = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(-1) = 0\}$.

b. $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$

18.28 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

a. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans distincts, montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

b. Soit H et H' deux hyperplans de E , montrer qu'ils possèdent un supplémentaire en commun.

c. Soit H un hyperplan de E et G un SEV de E non inclus dans H , montrer que $\dim(H \cap G) = \dim G - 1$.

Résolution d'une équation linéaire

♦ 18.29 Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u \mapsto v \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

a. Montrer que f est linéaire et déterminer $\text{Ker } f$

b. Déterminer les suites réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + n + 1$