

## Programme de colles-semaine 24 -17/04 au 10/04

---

### Analyse asymptotique

- Définition de f admet un DL d'ordre n en 0, exemple fondamental :  $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$ ,

unicité, troncature, substitution, parité,  $DL_n(0)$  de  $\frac{1}{1+x}$  et  $DL_{2n}(0)$  de  $\frac{1}{1+x^2}$ .

- Définition de f admet un DL d'ordre n en a. On se ramène systématiquement à un  $DL_n(0)$  en posant  $x = a + h$ .
- Soit f définie au voisinage de a, f est continue en a ou prolongeable par continuité en a ssi f admet un  $DL_0(a)$  et f (ou f prolongée) est dérivable en a ssi f admet un  $DL_1(a)$ .
- Formule de Taylor-Young (admis ici), DL à tout ordre en 0 de exp, cos, sin et  $(1+x)^\alpha$ , cas particulier usuels :

$DL_3(0)$  de  $\sqrt{1+x}$  et  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$  en 0.

- Combinaison linéaire et produit de DL, DL en 0 de ch et sh.
- Composition de  $DL_n(0)$ , application au DL de l'inverse d'une fonction admettant un  $DL_n(0)$  avec  $a_0 \neq 0$ ,  $DL_5(0)$  de tan.
- Intégration,  $DL_n(0)$  de  $\ln(1+x)$  et  $\arctan(x)$ .
- Utilisation des DL pour la recherche d'un équivalent simple, pour le calcul d'une limite, pour une étude locale, pour une étude de branches infinies, pour un développement asymptotique de  $u_n$ .

### II. Applications linéaires

- Applications linéaires: définition et exemples, règle de calcul.
  - L'image d'un SEV par une application linéaire est un SEV,  $f(E)$  est un sev de F noté  $\text{Im} f$ .  
f surjective ssi  $\text{Im} f = F$ . Si  $E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$  alors  $\text{Im} f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$
  - L'image réciproque d'un SEV par une application linéaire est un SEV Noyau d'une application linéaire,  $\text{Ker} f$  est un SEV de E, f est injective ssi  $\text{Ker} f = \{0_E\}$ .
  - Opérations sur les applications linéaires : L'ensemble des applications, noté  $L(E,F)$  est un K-EV.  
Composition d'application linéaire.  $\text{Ker} f \subset \text{Ker} g \circ f$ ,  $\text{Im} g \subset \text{Im} g \circ f$  et  $[g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im} f \subset \text{Ker} g]$ .
  - Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes, définition et exemples.  
Composée d'endomorphismes, notation  $f^n$  pour f itérée n fois.  
Formule du binôme et de Bernoulli pour des endomorphismes qui commutent.
- 

### Déroulement de la colle:

- ① Calcul d'un DL sur le modèle des exercices d'entraînement en page 2
  - ② Une question de cours parmi
    - Énoncer la formule de Taylor-Young avec toutes ses hypothèses et l'appliquer pour obtenir le  $DL_3(0)$  de  $\sqrt{1+x}$  ou de  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
    - Soit  $f : E \rightarrow F$  linéaire, définition de  $\text{Im} f$  ou de  $\text{Ker} f$  et montrer qu'il s'agit d'un SEV.
    - Montrer que  $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im} f \subset \text{Ker} g$
    - Montrer que  $\text{Ker} f = \{0_E\}$  ssi f est injective.
  - ③ Exercice(s) au choix du colleur : Application des DL pour une étude locale et/ou exercice d'application directe du cours sur les applications linéaires.
- 

**Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10**

## Entraînement aux calcul de DL

1. Calculer le  $DL_3(0)$  de  $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
2. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto (e^x - 1)^2$
3. Calculer le  $DL_{10}(0)$  de  $f : x \mapsto x^2(\operatorname{ch}x - \cos x)^2$
4. Calculer le  $DL_5(0)$  de  $f : x \mapsto e^x \arctan(x)$
5. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2}$
6. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto (\cos x)^3$
7. Calculer le  $DL_3(0)$  de  $f : x \mapsto e^{\sin x}$
8. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto e^{\cos x}$
9. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto \cos(\tan x)$
10. Calculer le  $DL_4(0)$  de  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

## Réponses :

1.  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$
2.  $f(x) = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$
3.  $f(x) = x^6 + \frac{1}{180}x^{10} + o(x^{10})$
4.  $f(x) = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$
5.  $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^4 + o(x^4)$
6.  $f(x) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + o(x^4)$
7.  $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
8.  $f(x) = e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4\right) + o(x^4)$
9.  $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)$
10.  $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$