Programme de colles-semaine 25 -04/05 au 08/05

II. Applications linéaires

• Applications linéaires: définition et exemples, règle de calcul.
• L'image d'un SEV par une application linéaire est un SEV, f(E) est un sev de F noté Imf.
f surjective ssi Imf = F. Si E = Vet(e_1, e_2, …, e_n) alors Im f = Vect(f(e_1), f(e_2), …, f(e_n))
• L'image réciproque d'un SEV par une application linéaire est un SEV Noyau d'une application linéaire, Kerf est un SEV de E, f est injective ssi Kerf = {0E}.
• Opérations sur les applications linéaires : L'ensemble des applications, noté $\mathcal{L}$(E,F) est un $\mathbb{K}$-EV.
Composition d'application linéaire. Kerf $\subset$ Ker g$\circ$f, Im g $\subset$ Im g$\circ$f et [g$\circ$f = 0 $\Leftrightarrow$ Im f $\subset$ Ker g].
• Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes, définition et exemples.
Composée d'endomorphismes, notation f^n pour f itérée n fois.
Formule du binôme et de Bernoulli pour des endomorphismes qui commutent.
• Cas particuliers d'endomorphismes de E: homothéties, projections et symétrie
★ Projecteurs: f$\in\mathcal{L}$(E) est un projecteur lorsque f$\circ$f = f.
Si p est un projecteur de E alors E = Kerp $\oplus$ Imp et p est le projection sur Imp parallèlement à Kerp.
★Symétrie: f$\in\mathcal{L}$(E) est une involution lorsque fof=I_d.
Si f est une involution de E alors E = Ker(f-Id)$\oplus$Ker(f+Id) et f est la symétrie par rapport à Ker(f-Id) parallèlement à Ker(f+Id).

• Image d'une famille génératrice, d'une famille liée, si f est injective alors l'image d'une famille libre dans E est libre dans F.
• Image d'une base $\mathcal{B}$: f est injective ssi f($\mathcal{B}$) est libre dans F, f est bijective ssi f($\mathcal{B}$) est une base de E
Si E a pour base B toute application linéaire u de E dans F est entièrement déterminée par l'image de B
• Espaces vectoriels isomorphes : cas de la dimension finie.
• Rang d'une application linéaire, lemme du rang et théorème du rang. Conséquence : caractérisation des applications injectives, surjectives et bijectives en dimension finie.
• Rang d'une composée
• Hyperplan défini comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.
En dimension finie H est un hyperplan ssi dim H = n – 1
• Equation linéaire.

Déroulement de la colle:

① Etude locale (en a ou en $\pm\infty$) d'une fonction à l'aide d'un DL de petit ordre.

② Une question de cours parmi les suivantes

- Donner la définition d'une projecteur de E et monter que si p est un projecteur de E alors E = Kerp $\oplus$ Imp
- Soit f$\in\mathcal{L}$(E,F) et $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que f est injective ssi f($\mathcal{B}$) est libre dans E.
- Enoncé et preuve du lemme du rang : Soit f$\in\mathcal{L}$(E, F) et H un supplémentaire de Ker f dans E.

L'application $\varphi : \begin{cases} H \to \mathrm{Im} f \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est un isomorphisme.

③ Exercice(s) d'algèbre linéaire

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10