Chapitre 19 : Représentations matricielles en dimension finie-POLY1

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

E et F désigne des espaces vectoriels non nuls de dimension finie.

1. Matrice de vecteurs:

1.1 Matrice représentative d'un vecteur de E

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et x un vecteur de E.

$\exists\,!(x_1, x_2, ..., x_n)\in\mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

Def: On appelle matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et on note $M_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Exemples :

1 Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les bases $\mathcal{C} = ((1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1))$ et $\mathcal{D} = ((1,0,0)\ (1,1,0)\ (1,1,1))$

Donner les matrices colonnes de $v = (-1,2,3)$ dans ces bases

2 Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les bases $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{D} = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$

Donner les matrices colonnes de $P = X^2(X+2)$ dans ces bases.

1.2 Matrice représentative d'une famille de vecteurs de E.

Def: Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et une famille $\mathcal{F} = (v_1, \quad , v_p)$ de p vecteurs de E. On appelle matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on note $M_{\mathcal{B}}(v_1, \quad , v_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la jème colonne contient les coefficients de v_j dans la base $\mathcal{B}$.

Dans la pratique: $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\exists!(a_{1,j}, a_{2,j}, ..., a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$, $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & & v_j & & v_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \prec e_1 \\ \\ \prec e_i \\ \\ \prec e_n \end{array}$$

Remarque : les colonnes de M sont les matrices colonnes des coordonnées de chaque vecteur de la famille dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples : A partir des exemples précédents

① Donner les matrices dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de

$\mathcal{F} = ((-1,0,2)\ (-3,5,0)\ (1,1,1))$

② Donner les matrices dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de

$\mathcal{F} = (X^3,\ X^2(X+1),\ X^3+1)$

Proposition 19.1: Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, l'application f de E^p dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui à une famille $\mathcal{F}$ de cardinal p associe sa matrice dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme.

Dans la pratique :

★ Une base étant fixée, toute famille de vecteurs est entièrement définie par sa matrice.

★ Si $M = Mat_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, ..., u_p)$ et $N = Mat_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, ..., v_p)$ alors,
$\forall\lambda, \mu\in\mathbb{K}$, $Mat_{\mathcal{B}}(\lambda u_1 + \mu v_1, ..., \lambda u_p + \mu v_p) = \lambda M + \mu N$

Def : Une famille $\mathcal{F} = (v_1,..., v_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est dite échelonnée lorsque sa matrice représentative dans la base canonique est échelonnée.

Exemple : $\mathcal{F}$ = ((1,0,0,0), (-1,2,0,0)(3,0,1,0)(-1,0,-2,3)) dans $\mathbb{R}^4$.

$Mat_e(\mathcal{F}) = \left(\quad \right)$

Proposition 19.2 : Une famille de vecteurs non nuls échelonnée de $\mathbb{K}^n$ est libre dans $\mathbb{K}^n$.

Preuve : Soit $(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_p)\in\mathbb{K}^p$, la résolution de $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_p v_p = 0_E$ donne un système échelonné ayant comme unique solution (0, 0,..., 0).

vérifier que la famille précédente est libre dans $\mathbb{R}^4$.
avec la définition.

2. Matrice d'une application linéaire :

2.1 Définition, dimension de $\mathcal{L}(E,F)$

Def: Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et on note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, la matrice de la famille de vecteurs $(u(e_1), ..., u(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$.

Dans la pratique: Soit A la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

$\forall j \in [\![1, p]\!], \exists!(a_{1,j}, a_{2,j}, ..., a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n, \ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$ *On décompose $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$ de F*

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & & u(e_j) & & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \prec f_1 \\ \\ \prec f_i \\ \\ \prec f_n \end{array} \end{array}$$

Le nombre de lignes de A est la dimension de l'espace d'arrivée.

Le nombre de colonnes de A est la dimension de l'espace de départ.

Exemples :

① Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longmapsto (x+y-z, 2x+y-3z) \end{cases}$

la matrice de f relativement aux bases canoniques est

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ car $f(1,0,0) = (1,2) = 1 \times (1,0) + 2 \times (0,1)$

$f(0,1,0) = (1,1) = 1 \times (1,0) + 1 \times (0,1)$

$f(0,0,1) = (-1,-3) = -1 \times (1,0) - 3 \times (0,1)$

② Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto XP' + 2P \end{cases}$

Pour obtenir la matrice de f dans la base canonique, on calcule :

$f(1) = 0 + 2 = 2$

$f(X) = X + 2X = 3X$

$f(X^2) = X(2X) + 2X^2 = 4X^2$

$$\text{Mat}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \prec 1 \\ \prec X \\ \prec X^2 \end{array} \end{array}$$

Pour obtenir la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (1, (X-1), (X-1)^2)$, on calcule

$f(1) = 2$

$f(X-1) = X \times 1 + 2(X-1) = 3X-2$

$f((X-1)^2) = X(2(X-1)) + 2(X-1)^2 = 2X^2 - 2X + 2(X-1)^2$

Attention, il faut exprimer ces polynômes dans la base $\mathcal{B}$!!

$f(1) = 2 \times 1$

$f(X-1) = 3(X-1) + 1 \times 1$

$$f((X-1)^2) = 2(X^2-2X+1) + 2X-2 + 2(X-1)^2$$
$$= 2(X-1) + 4(X-1)^2$$

on peut aussi utiliser la formule de Taylor !

et donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X-1) & f((X-1)^2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X-1 \\ \leftarrow (X-1)^2 \end{array} \end{array}$$

Cas particuliers des endomorphisme: Soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$

★ On peut choisir la même base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et d'arrivée.
On note alors $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$. Cette matrice est carrée d'ordre n.

★ La matrice de Id_E dans une base $\mathcal{B}$ avec dim E = n est la matrice identité I_n.

★ La matrice d'une homothétie h de rapport λ est $Mat_{\mathcal{B}}(h) = \lambda I_n$.
Une telle matrice est dite scalaire

★ La matrice d'une forme linéaire est une matrice ligne.

Proposition 19.3: Les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E et F étant fixées, l'application de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui à toute application linéaire de E dans F associe sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est un isomorphisme.

Preuve en annexe :

Conséquences:

★ Si u et v sont deux applications linéaires de E dans F de matrices respectives A et B dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, alors A + B est la matrice de u + v et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, λA est la matrice de λu.

★ $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\boxed{\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)}$

★ $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\boxed{\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2}$

★ Une fois les bases fixées, pour décrire une application linéaire, il suffit de donner sa matrice.

2.2 Lien avec le produit matriciel.

a) Image d'un vecteur par une application linéaire:

Proposition 19.4: Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
$\forall x \in E$, si on note $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = Mat_{\mathcal{C}}(u(x))$, alors $A.X = Y$

Dans la pratique: Pour calculer l'image d'un vecteur x par une application linéaire, si on connaît sa matrice relativement à des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, il suffit de calculer le produit matriciel A.X où X est la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

✍ Preuve:

b) Matrice de la composée de deux applications linéaires

Proposition 19.5: Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p, n, m, de base respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. On a $(v \circ u) \in \mathcal{L}(E,G)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$

Cas particulier: Si u est un endomorphisme de E de base $\mathcal{B}$, de matrice A relativement à $\mathcal{B}$, alors A^2 est la matrice de $u^2 = u \circ u$ relativement à $\mathcal{B}$ et plus généralement, A^n est la matrice de $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u$ relativement à $\mathcal{B}$.

✍ Idée de la preuve (preuve détaillée en annexe):

c) Matrice d'un isomorphisme

Proposition 19.6: Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension n, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

u est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ alors $M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})$

Dans la pratique : Pour montrer qu'une application linéaire est bijective, on peut montrer que sa matrice dans des bases choisies arbitrairement est inversible.

✍ Preuve :

3. Noyau, image et rang d'une matrice

3.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

On considère $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ munis de leurs bases canoniques.

On a vu que l'application f de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui à toute application linéaire associait sa matrice relativement aux bases canoniques est un isomorphisme.

Def : Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application u canoniquement associée à A est l'antécédent de A par f.
C'est à dire, que u est l'unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ telle que A soit la matrice de u relativement aux bases canoniques.

Dans la pratique : Si on note X la matrice colonne des coordonnées de $x\in\mathbb{K}^p$ dans la base canonique, on a $u:\begin{cases}\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX\end{cases}$

✍ Exemples:

Proposition 19.7 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A.

A est inversible si et seulement si u est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.

✍ Preuve:

3.2 Noyau et image d'une matrice

Def : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le noyau de A noté Ker A et l'image de A noté Im A sont respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Dans la pratique

★ Pour déterminer Ker A, on résout dans $\mathbb{K}^p$ le système homogène AX = 0.

Des matrices qui se correspondent par OEL ont le même noyau.

★ Im A est le SEV de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs colonnes de A.

Des matrices qui se correspondent par OEC ont la même image.

✍ Exemples:

3.3 Rang d'une matrice

Def : Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang de A noté rg(A) est le rang de l'application de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A.

Dans la pratique : le rang de A est le rang de la famille des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{K}^n$

Propriétés immédiates :

① $rg(A) \leq \min(n, p)$

② $\forall B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$

③ $\forall B\in GL_p(\mathbb{K})$, $\forall C\in GL_n(\mathbb{K})$, $rg(AB) = rg(CA) = rg(A)$

Théorème 19.1 Théorème du rang version matrice Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$rg(A) + \dim \operatorname{Ker} A = p$$

Corollaire :

① Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on ne modifie pas le rang de A en effectuant des OEL ou des OEC sur A.

② Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{(0,\ldots0)\} \Leftrightarrow \operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n \Leftrightarrow rg(A) = n$

Dans la pratique : Pour déterminer le rang d'une matrice, 0n peut donc appliquer des O.E.L ou des O.E.C pour obtenir une matrice échelonnée en ligne ou en colonne dont le rang est le nombre de pivots. Dans les faits, il suffit de s'arrêter dès qu'on obtient une matrice de rang trivial.

3.4. Lien entre les différentes notions de rang :

Proposition 19.8 : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le rang de A est égal :

① Au rang de toute famille de vecteurs qu'elle représente.
② Au rang de toute application linéaire qu'elle représente
③ Au rang de tout système linéaire dont elle est la matrice (annexe 3)

Dans la pratique : En dimension finie, on peut toujours se ramener au calcul du rang d'une matrice.
• Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs il suffit de déterminer le rang de sa matrice dans une base arbitrairement choisie.
De plus, si $\mathcal{F}$ une famille de cardinal n dans E de dimension n et de base $\mathcal{B}$,
$\mathcal{F}$ est une base de E ssi $rg(\mathcal{F}) = n$ ssi $rg(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = n$ ssi $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible
• Pour déterminer le rang d'une application linéaire il suffit de déterminer le rang de sa matrice dans des bases arbitrairement choisies.

3.5 Rang de la transposée

Proposition 19.9: Pour toute matrice A, $rg(A) = rg(A^T)$.

Admis

Conséquence: Le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de vecteurs formée par ses lignes.

Annexe 1 : Preuve de la proposition 19.3 :

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension n, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

On pose $f : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{cases}$.

• Montrons que f est linéaire : Soit u et v deux applications linéaires de E dans F et λ et μ deux scalaires. On note M et N les matrices respectives de u et v dans les bases choisies.
Soit e_j un élément de $\mathcal{B}$, $j\in[\![1,p]\!]$, $(\lambda u + \mu v)(e_j) = \lambda u(e_j) + \mu v(e_j)$.

Or $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$ et $v(e_j) = \sum_{i=1}^{n} n_{i,j} f_i$ donc $(\lambda u + \mu v)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j}\right) f_i$.

Par définition, la matrice de $\lambda u + \mu v$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est $\lambda M + \mu N$, donc $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ et f est linéaire.

• Montrons que f est bijective :
Soit M une matrice fixé dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de coefficient $m_{i,j}$.

$\forall j\in[\![1,p]\!]$, on pose $y_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$ on sait qu'une application linéaire est entièrement déterminé par les images d'une base de son espace de départ, donc il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que : $\forall j\in[\![1,p]\!]$, $u(e_j) = y_j$, c'est à dire telle que $f(u) = M$.
Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet donc un unique antécédent par f.

Bilan : f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Annexe 2 : Preuve de la proposition 19.5 : On pose les notations suivantes
$\mathcal{B} = (e_1,\dots e_p)$ base de E $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_n)$ base de F $\mathcal{D} = (g_1,\dots,g_m)$ base de G
$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (a_{ij})$ matrice de taille nxp
$B = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) = (b_{ij})$ matrice de taille mxn.
La matrice $C = BA$ est bien définie et ses coefficients sont par définition du produit matriciel :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}$$

Pour déterminer la matrice de $v\circ u$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ on doit décomposer le vecteur $(v\circ u)(e_j)$ dans la base $\mathcal{D}$ pour tout $j\in[\![1,p]\!]$,

$u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} f_k$ car les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont dans $C_j(A)$

$(v\circ u)(e_j) = v(u(e_j)) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} v(f_k)$ par linéarité de v

$v(f_k) = \sum_{i=1}^{m} b_{i,k} g_i$ car les coordonnées de $v(f_k)$ dans la base $\mathcal{D}$ sont dans $C_k(B)$

On remplace : $(v\circ u)(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \sum_{i=1}^{m} b_{i,k} g_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \right) g_i = \sum_{i=1}^{m} c_{i,j} g_i$.

On a montré que les coordonnées de $(v\circ u)(e_j)$ dans la base $\mathcal{D}$ sont dans la jème colonne de M et donc, par définition, C est bien la matrice de $(v\circ u)$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.

Annexe 3: Retour sur le rang d'un système linéaire et la structure des solutions:

Soit (S) un système de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$ et A sa matrice.

Le rang de (S) est le rang de la matrice échelonnée obtenue par OEL à partir de A donc c'est aussi le rang de A. Notons $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'application canoniquement associée à A.

On a $rg(S) = rg(A) = rg(\varphi) = r \leq \min(n,p)$

★ Si (S) est homogène, résoudre S revient à résoudre $AX = 0$ donc à déterminer $\text{Ker } A = \text{Ker } \varphi$.
Les solutions forment donc un SEV de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$, d'après le théorème du rang.

Par conséquent si $r = p$, $S_{ol} = \{(0,0,...,0)\}$.

★ Si (S) a un second membre $B \neq (0,..,0)$. Résoudre (S) revient à chercher les antécédents de B par φ.

- Si $r < n$ alors (S) a une solution X_0 ssi $B \in \text{Im } A$, dans ce cas, la solution est unique ssi $r = p$.

- Si $r = n$ alors φ est surjective et le système admet au moins une solution $X_0 \in \mathbb{K}^p$.

De plus $AX = B \Leftrightarrow AX = AX_0 \Leftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Leftrightarrow X - X_0 \in \text{Ker } A$ et donc $Sol = X_0 + \text{Ker } A$

- Si $r = p = n$ alors φ est bijective et (S) admet X_0 comme unique solution.

Dans ce cas , la matrice de (S) est inversible et on dit que le système (S) est un système de Cramer.