Chapitre 19 : Représentations matricielles en dimension finie-Poly2

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p deux entiers naturels non nuls.

E et F désigne des espaces vectoriels non nuls de dimension finie.

4. Changement de base

Il est clair que la matrice d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire dépend des bases choisies. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'effet d'un changement de base de E et/ou de F.

4.1 Matrice de passage :

Def: Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$deux bases d'un même espace vectoriel E de dimension finie n.
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
On note cette matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, c'est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans la pratique: Les colonnes de $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ contiennent les coordonnées de la nouvelle base dans l'ancienne.

Proposition 19.10: $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ ou encore $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$

✍ Preuve et exemples:

Conséquences:

★ Si $\mathcal{B}$ est une base de E alors $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = I_n$

★ Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E alors $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}$

★ Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est inversible et $P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$

4.2 Formules de changement de base

Théorème 19.2:

① Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x\in E$
On a la relation $M_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\times M_{\mathcal{B}'}(x)$

② Soit E un espace vectoriel de dimension p, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, F un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de E et $u\in\mathcal{L}(E,F)$.

Si on note $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$, $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}$ alors $B = Q^{-1}AP$

✍ Preuve:

Cas particulier usuel: Soit u est un endomorphisme de E. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, M la matrice de u dans $\mathcal{B}$ et N la matrice de u dans $\mathcal{B}'$.
La formule de changement de base devient :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\times M_{\mathcal{B}}(u)\times P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \Leftrightarrow N = P^{-1}MP}$$

4.3 Matrices semblables :

Def : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice inversible P de $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$

Dans la pratique :
- Deux matrices qui représentent le même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables.
- Pour montrer que A et B sont semblables, on peut considérer u l'endomorphisme associé à A et chercher une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $B = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.

Propriétés immédiates :
- Deux matrices semblables ont le même rang
- Si deux matrices A et B sont semblables alors $\forall n\in\mathbb{N}$, A^n et B^n sont semblables et $B^n = P^{-1}A^nP$.

✍ Preuve: