Chapitre 20: Dénombrement-POLY

1 Définition, notion de cardinal

Dans ce paragraphe E désigne un ensemble et n un entier naturel non nul.

Def : E est un ensemble fini lorsque E est vide ou lorsqu'il existe une bijection de E sur $[\![1, n]\!]$.
L'entier n, si il existe, est unique, et est appelé cardinal de E. On note card(E) ou |E|.
Par convention card(∅) = 0

Remarques :
- Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.
- Toute bijection de E sur $[\![1, n]\!]$ permet de numéroter les éléments de E et donc on peut écrire : $E = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$.

Exemples :
- Un singleton est un ensemble de cardinal 1
- $E = [\![p, n]\!]$ est un ensemble d'entiers de cardinal (n – p + 1).

✍ Preuve : L'application $\varphi : [\![p, n]\!] \to [\![1, n - p + 1]$ définie par $\varphi(x) = x - p + 1$ est une bijection

Proposition 20.1 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et F un ensemble.
Il existe une bijection de E sur F si et seulement si F est fini et card(F) = card(E)

✍ Preuve :

Dans la pratique : Pour montrer qu'en ensemble est fini et donner son cardinal, on peut le mettre en bijection avec un ensemble fini dont le cardinal est connu.

Proposition 20.2: Soit E et F deux ensembles finis. Le produit cartésien E×F est fini et card(E×F) = card(E).card(F)

✍ Justification:

Remarque : On peut généraliser par récurrence cette propriété à n ensembles finis $E_1, \ldots, E_n$.

$E_1 \times \ldots \times E_n$ est un ensemble fini et Card $(E_1 \times \ldots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \text{card}(E_i)$.

Et donc si E est fini, alors E^n est fini et Card$(E^n) = (\text{Card } E)^n$.

---

2. Parties d'un ensemble fini

2.1 Cardinal d'une partie d'un ensemble fini.

Proposition 20.3 : Soit E un ensemble fini et A une partie de E
A est finie avec card(A) ≤ card(E) de plus card(A) = card(E) ⇔ A = E

Admis

Exercice: Montrer que $\mathbb{N}$ est infini

Dans la pratique :
- Pour démontrer l'égalité de deux ensembles finis, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des cardinaux.
- Si F est inclus dans E et si F est infini alors E est infini

2.2 Opérations sur les parties d'un ensemble fini.

a) Union disjointe, partition.

Proposition 20.4 : Soit A et B deux parties de E.
Si A et B sont disjointes alors card$(A \cup B)$ = card(A) + card(B)

Admis

Attention : Cette formule n'est pas générale, il faut bien vérifier l'hypothèse : $A \cap B = \emptyset$

Corollaire : Soit E un ensemble fini.

① Si $(A_i)_{1 \le i \le p}$ est une famille finie de parties disjointes de E alors $\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \text{card}(A_i)$

② Si A et B sont deux parties de E, alors card $(A \setminus B)$ = card(A) – card$(A \cap B)$.

③ Si A est une partie de E alors card$(\overline{A})$ = card(E) – card(A)

Preuves

① Par récurrence sur p

②

③ découle de ② en prenant A = E et B = A.

Def : On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E lorsque
$\forall i\in I, A_i \neq \emptyset, \forall (i, j)\in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i\cap A_j = \emptyset$ et $E = \bigcup_{i\in I} A_i$

Schéma :

Exemples :
- Les entiers pairs et les entiers impairs sont une partition de $[\![1, n]\!]$
- Les groupes de colles sont une partition de la PCSI2

Proposition 20.5: Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille partition de E alors $\text{card}(E) = \sum_{i\in I} \text{card}(A_i)$

★ Méthode : Pour dénombrer un ensemble on peut trouver une famille partition dont les parties sont plus simples à dénombrer

Exercice : Combien y-a-il de nombres entiers entre 100 et 999 qui s'écrivent avec exactement deux fois le chiffre 7 ?

Théorème 20.1: Soit E un ensemble fini de cardinal n, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Preuve :

b) Formule de Poincaré

Proposition 20.6: Soit A et B deux parties de E.

$$\mathrm{card}(A\cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A\cap B)$$

Remarque : Ceci est la formule générale pour le cardinal d'une réunion.

✍ Preuve :

Remarques:

• La formule de Poincaré se généralise par la formule du crible qui est hors programme.

On peut retenir que, pour 3 parties A, B, C de E, on a :
card(A∪B∪C) = card(A) + card(B) + card(C) - car(A∩B) - card(A∩C) - card(B∩C) + card(A∩B∩C)

Et retenir que, en général, $\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leq \sum_{i\in I}\mathrm{Card}(A_i)$

• $(\{x\})_{x\in E}$ est une partition de E, donc $\mathrm{card}(E) = \sum_{x\in E}\mathrm{card}(\{x\}) = \sum_{x\in E} 1$.

Si A est une partie de E, alors $\mathrm{card}(A) = \sum_{x\in A}\mathrm{card}(\{x\}) = \sum_{x\in A} 1 + \sum_{x\in \overline{A}} 0 = \sum_{x\in E}\mathbb{I}_A(x)$

On retrouve alors facilement la formule de Poincaré en utilisant les indicatrices de A∪B et de A∩B.

2.3 Applications entre ensembles finis

Proposition 20.7 : Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$

① Si f est injective alors card(E) = card(f(E)) ≤ card(F)

② Si f est surjective alors card(E) ≥ card(F)

③ Si f est bijective alors card(E) = card(F)

✍ Preuves et illustrations:

Conséquence : Soit E et F deux ensembles finis, la contraposée de ① est :
Si card(E) > card(F) il ne peut y avoir d'injections de E dans F, ceci est à la base du principe de Dirichlet ou principe des tiroirs : Si on range (n + 1) paires de chaussettes dans n tiroirs alors au moins un des tiroirs contient deux paires de chaussettes.

✍ Exercice : Montrer qu'il existe un multiple de 2026 qui ne contient que les chiffres 1 et 0.

Théorème 20.2: Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal $n \geq 1$ et $f : E \to F$
On a les équivalences : f est surjective $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est bijective

Preuve : Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal.
- Supposons f injective. f induit une bijection $g : E \to f(E)$ et donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E) = \text{card}(F)$ et comme f(E) est une partie de F, on en déduit que f(E) = F donc que f est surjective et donc f est bijective.
- On montre par l'absurde que surjective $\Rightarrow$ injective.

La négation de cette implication (non P ou Q) f est surjective et non injective (P et non Q)
Supposons f surjective et non injective.
On a f(E) = F et f n'est pas injective donc $\text{card}(f(E)) < \text{card}(E) \Leftrightarrow \text{card}(E) > \text{card}(F)$, ce qui est absurde.
Ainsi on a bien f surjective $\Rightarrow$ f injective et donc f bijective.
- Les autres implications sont triviales.

★ Dans la pratique : Si on $f : E \to F$ avec E et F finis et de même cardinal alors pour montrer que f est bijective il suffit de montrer qu'elle est injective ou surjective.

Si $f : E \to E$, on a les équivalences : f est surjective $\Leftrightarrow$ f est injective $\Leftrightarrow$ f est bijective

Dans ce cas on dit que f est une permutation de E.

---

3. Outils pour le dénombrement

Dans la pratique, on essaiera le plus possible de modéliser les ensembles à dénombrer par les notions de ce paragraphe.

3.1 p-listes

Def : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}$. On appelle p-liste de E ou p-uplet d'éléments de E, un élément $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de E^p

★ Remarque : Il s'agit d'une liste ordonnée de p éléments de E avec possibilité de répétitions.
Elle **modélise le résultat de p tirages successifs avec remise**.

Exemples :

Proposition 20.8 : Soit E un ensemble fini de cardinal n, le nombre de p-listes de E est $\mathrm{card}(E^p) = n^p$

Corollaire : Soit E et F deux ensembles finis de cardinal respectifs p et n.
L'ensemble des applications de E dans F, $\mathcal{F}(E,F) = F^E$ est fini et $\mathrm{card}(F^E) = (\mathrm{card}(F))^{\mathrm{card}(E)} = n^p$

✍ Preuve

3.2 p-arrangements, permutations

Def : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et $p \in [\![1, n]\!]$.

- On appelle p-arrangement ou arrangement de p éléments de E, une p-liste d'éléments distincts.
- On appelle permutation de E un arrangement de n éléments de E.

★ Remarque : Il s'agit d'une liste ordonnée de p éléments de E sans possibilité de répétitions.
Elle **modélise le résultat de p tirages successifs sans remise**.

Exemples :

Proposition 20.9 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et $p \in [\![1, n]\!]$.

① Le nombre de p-arrangements de E est $A_n^p = n(n-1).....(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

② le nombre de permutations de E est n !

Corollaire : Soit E et F deux ensembles finis de cardinal p et n.

① Si $p \leq n$, le nombre d'injections de E dans F est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

② Si n = p, le nombre de bijections de E dans F est n !

✍ Preuves :

3.3 p-combinaisons

Def : Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in [\![0, n]\!]$.
On appelle p-combinaison de E, une partie de E de cardinal p : $\{x_1, {}_2, \ldots, x_p\}$

★ Remarque : Il s'agit d'une liste non ordonnée de p éléments de E, sans possibilité de répétitions. Elle **modélise le résultat d'un tirage simultané de p éléments de E.**

Exemples :

Proposition 20.10: Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in [\![0;n]\!]$.

Le nombre de p-combinaisons de E est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

✍ Preuve

Application : Preuves combinatoires des propriétés des coefficients binomiaux :

Rappels :

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in [\![0, n]\!],\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in [\![1, n]\!],\ \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ et $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

✍ Preuves :

3.4 Anagrammes

Def : On considère une liste ordonnée de symbole qu'on appelle « mot ». Une anagramme de ce mot est un mot obtenu par permutation des symboles du mot initial.

Exemples :
- HATM est une anagramme de MATH
- 110100 est une anagramme de 111000

Exercice :

① Donner le nombre d'anagrammes du mot MATH

② Donner le nombre d'anagrammes du mot DEJEUNER

③ Donner le nombre d'anagrammes du mot ABRACADABRA

④ Donner le nombre d'anagrammes de 111000