Chapitre 21 : Probabilités sur un univers fini

1. Expérience aléatoire, univers, et événements

On parlera d'expérience aléatoire lorsque le résultat est imprévisible.
C'est le cas lorsqu'on lance un dé, jette une pièce de monnaie, choisit un objet au hasard parmi d'autres.

Déf: Les résultats ou issues possibles envisagés pour une expérience aléatoire forment l'univers de cette expérience. On le note en général Ω.

Exemples :
★ On jette un dé à 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
★ On lance une pièce de monnaie : Ω = {pile, face}
★ On lance deux dés en s'intéressant au rang d'apparition du premier « double 6 »: $\Omega = \mathbb{N}$
★ On choisit un réel au hasard dans l'intervalle entre 0 et 1 : $\Omega = [0,1]$

Dans ce chapitre, on se limitera aux cas où Ω est un ensemble fini.
On pourra noter $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

Déf: Soit Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire. On appelle événement tout partie de Ω. L'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelé tribu des événements et $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable fini.

Exemple : On jette un dé à 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
A : « le nombre obtenu est pair » est l'événement $A = \{2, 4, 6\}$
B : « le nombre obtenu est inférieur à 3 » est l'événement $B = \{1, 2, 3\}$

Cas particuliers et vocabulaire : Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$
- Soit A un événement, lorsqu'une issue w_i appartient à A, on dit que w_i réalise A
- $\varnothing$ est l'événement impossible car aucune issue ne le réalise.
- Ω est l'événement certain car toutes les issues le réalisent.
- Le singleton $\{w_i\}$ est un événement élémentaire car il est constitué d'une seule issue.

Déf: Soit A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.
- $A\cup B$ est l'événement « A ou B »
- $A\cap B$ est l'événement « A et B ».
- $A\backslash B$ est l'événement « A mais pas B ».
- Le complémentaire de A dans Ω noté $\bar{A}$ est l'évènement contraire de A.
- A et B sont dits incompatibles lorsqu'ils sont disjoints c'est à dire lorsque $A\cap B = \varnothing$

Remarque : Pour tout A de $\mathcal{P}(\Omega)$, A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

Exemple : On lance deux dés à 6 faces.
A : « la somme des dés est 7 » et B : « les deux nombres obtenus sont pairs » sont incompatibles

Déf: Soit Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire. Une famille $(A_1,A_2,...,A_n)$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un système complet d'événements lorsqu'on a :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!], \quad i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

Remarque : Si $(A_1, A_2,...,A_n)$ est un système complets d'événements non impossibles alors ils forment une partition de Ω.

Exemple : On lance deux dés à 6 faces. Les événements A_1 : « les 2 nombres obtenus sont impairs », A_2 « les deux nombres obtenus sont pairs » et A_3 : « la somme des deux nombres est impair » forment un système complet d'événements.

Cas particuliers à connaître :

★ La famille des singletons $(\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_n\})$ est un système complet d'événements.

★ Pour tout événement A, $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

2. Probabilité sur Ω

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, on peut constater que les différents événements auxquels on peut s'intéresser n'ont pas la même fréquence d'apparition. Dans ce paragraphe, on se donne des outils mathématiques permettant de donner une mesure de ces phénomènes aléatoire.

2.1 Définition et règle de calcul

Déf: Soit Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire.
Une probabilité sur Ω est une application $\mathcal{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$

Vocabulaire et notation: Une fois définie une probabilité $\mathcal{P}$ sur Ω, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ est un espace probabilisé fini et le réel $\mathcal{P}(A)$ de $[0, 1]$ est la probabilité de l'événement A.
Soit $\omega \in \Omega$, on notera $\mathcal{P}(\omega)$ plutôt que $\mathcal{P}(\{\omega\})$ la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega\}$.

Proposition 21.1 : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ un espace probabilisé fini.

① $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$

② $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$

③ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \cap B)$

④ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \le \mathcal{P}(B)$ *croissance*

⑤ $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$ *formule de Poincaré*

✍ Preuve :

Déf: Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et A un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$.

- On dit que A est <u>quasi-certain</u> lorsque $\mathcal{P}(A) = 1$
- On dit que A est <u>quasi-impossible</u> lorsque $\mathcal{P}(A) = 0$.

Exemple : On lance une pièce de monnaie truquée. On pose Ω = {Pile, Face}.
On peut définir une probabilité sur Ω, en posant $\mathcal{P}$(Pile) = 1 et $\mathcal{P}$(Face) = 0
Pile est alors quasi-certain et Face quasi-impossible.

Proposition 21.2 Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini.

① Pour tous événements $A_1, A_2, ..., A_n$ deux à deux incompatibles, on a $\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i)$.

② Si $(A_1, A_2, ..., A_n)$ est un système complet d'événements alors $\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i) = \mathcal{P}(\Omega) = 1$

Preuves:

① Par récurrence sur n

② Découle directement de la définition.

Conséquence : $(\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_n\})$ est un système complet d'événements donc $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\omega_i) = 1$

<u>Théorème 21.1</u> : Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un univers fini associé à une expérience aléatoire et une famille de réels positifs $(p_1, p_2, ..., p_n)$ de somme 1 : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Il existe une unique probabilité $\mathcal{P}$ sur Ω telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(\{\omega_i\}) = p_i$
et pour tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{P}(A)$ est la somme des probabilités des issues qui réalisent A,
ou encore : $\mathcal{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathcal{P}(\omega) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ \omega_i \in A}} p_i = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_A(\omega_i) p_i$

✍ Preuve :

Dans la pratique : Pour justifier qu'une application $\mathcal{P}$ est bien une probabilité sur Ω, il suffit de vérifier que $\mathcal{P}$ prend des valeurs positives et que la somme de ces valeurs est égale à 1.

✍ Exercice : Modéliser la lancer d'un dé pour lequel la face 6 sort deux fois plus souvent que les autres et calculer la probabilité d'obtenir une face paire avec ce dé.

2.2 Probabilité uniforme

Déf: Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ un espace probabilisé fini.

- Deux événements A et B sont dits <u>équiprobables</u> lorsque $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.
- On dit que $\mathcal{P}$ est <u>uniforme</u> lorsque les événements élémentaires sont équiprobables, et on a nécessairement, $\forall\omega\in\Omega$, $\mathcal{P}(\omega) = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$.

✍ Exercice : Modéliser la lancer d'un dé parfait et calculer la probabilité d'obtenir une face paire avec ce dé.

Théorème 21.2 : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini.

Si $\mathcal{P}$ est uniforme alors $\forall\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

✍ Preuve :

Dans la pratique : On s'en souvient sous la forme : $\mathcal{P}(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}$.

Dans le cas où $\mathcal{P}$ est uniforme, les calculs de probabilités se ramènent donc à des problèmes de dénombrement.

- **Exercices 21.1 et 21.2**

Dans la pratique : Choix d'un espace probabilisé
Lorsqu'on traite un exercice de probabilité, il faut choisir l'espace probabilisé qui correspond à la situation étudiée. Il n'est pas toujours nécessaire d'expliciter Ω, son existence suffit pour appliquer les résultats du cours.
Ω étant fixé, le choix de $\mathcal{P}$ dépend du contexte de l'exercice. Des expressions comme « au hasard », « indiscernables au toucher », « parfaitement équilibré » induisent le choix de la probabilité uniforme.
De manière générale, on essaye de favoriser la probabilité uniforme, par exemple en choisissant astucieusement Ω.

- **Exercices 21.3 et 21.4**

3. Probabilité conditionnelle

3.1 Probabilité sachant B

Déf: Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement, $\mathcal{P}(B) > 0$.
Pour tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$, on appelle probabilité de A sachant B le réel
$\mathcal{P}_B(A) = \mathcal{P}(A|B) = \dfrac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)}$

Convention : Si $\mathcal{P}(B) = 0$ alors on pourra utiliser l'égalité $\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B) = 0$

Attention : $A|B$ n'est pas un événement !

Proposition 21.3 : L'application $\mathcal{P}_B : \begin{cases}\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \\ A \mapsto \mathcal{P}_B(A)\end{cases}$ est une probabilité sur Ω appelée probabilité conditionnelle sachant B.

Preuve :

Attention : Il ne faut pas confondre $\mathcal{P}_B(A)$ et $\mathcal{P}(A\cap B)$:
$\mathcal{P}_B(A)$ est la probabilité que A se réalise sous la condition que B s'est réalisé.
$\mathcal{P}(A\cap B)$ est la probabilité que A et B réalise en même temps.

Dans la pratique : Les hypothèses de l'énoncé permettent d'avoir $\mathcal{P}(A\cap B)$ ou bien $\mathcal{P}_B(A)$ et la définition permet d'obtenir l'autre probabilité grâce à la définition.

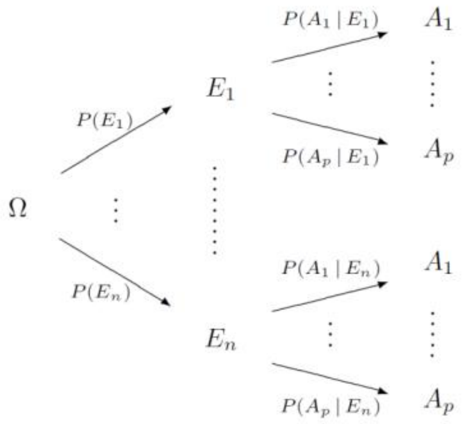
Remarque : Si $B \subset A$ alors $\mathcal{P}_B(A) = 1$ et donc A est quasi-certain pour la probabilité conditionnelle sachant B.

Corollaire : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement, $\mathcal{P}(B) > 0$
① $\mathcal{P}_B(\emptyset) = 0$
② $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{P}_B(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}_B(A)$
③ $\forall (A, A') \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $\mathcal{P}_B(A\setminus A') = \mathcal{P}_B(A) - \mathcal{P}_B(A')$
④ $\forall (A, A') \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $A\subset A' \Rightarrow \mathcal{P}_B(A) \le \mathcal{P}_B(A')$
⑤ $\forall (A,A') \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, $\mathcal{P}_B(A\cup A') = \mathcal{P}_B(A) + \mathcal{P}_B(A') - \mathcal{P}_B(A\cap A')$

Preuve : Evidemment puisque $\mathcal{P}_B$ est une probabilité sur Ω

Méthode : Représentation de situations de conditionnement par un arbre pondéré.

Lorsqu'un ou plusieurs événements conditionnent les autres, on peut rassembler les hypothèses dans un arbre pondéré.



$\mathcal{P}(E_1 \cap A_1) = \mathcal{P}(E_1) \times \mathcal{P}(A_1 | E_1)$

$\vdots$

$\mathcal{P}(E_1 \cap A_p) = \mathcal{P}(E_1) \times \mathcal{P}(A_p | E_1)$

$\vdots$

$\mathcal{P}(E_n \cap A_1) = \mathcal{P}(E_n) \times \mathcal{P}(A_1 | E_n)$

$\vdots$

Le plus souvent, les familles (E_1, …, E_n) et (A_1, …, A_p) sont des systèmes complets d'événements. Dans ce cas, les probabilités pondérant les flèches et partant d'un même nœud sont de somme 1.

Les arbres pondérés sont des outils de représentation, ils ne remplacent pas une preuve fondées sur les théorèmes de ce chapitre.

- **Exercice 21.6**

Théorème 21.3 *Formule des probabilités composées.*
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et A_1, ..., A_n des événements de $P(\Omega)$ tels que $\mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$, on a: $\mathcal{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}_{A_1}(A_2) \times \mathcal{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathcal{P}_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$

$$= \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2 | A_1) \times \mathcal{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathcal{P}(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

✍ Preuve :

Remarque : Si on représente la situation par un arbre pondéré, la formule des probabilités composées s'illustre par le fait que la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui y conduisent.

- **Exercices 21.5 et 21.7**

3.2 Formule des probabilités totales

Théorème 21.4 ***Formule des probabilités totales.***
Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1,\dots,A_n)$ un système complet d'événements tels que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\mathcal{P}(A_i) > 0$.

$$\forall B\in\mathcal{P}(\Omega),\ \mathcal{P}(B)=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_{A_i}(B)\times\mathcal{P}(A_i)$$

Preuve :

Dans la pratique : Si on choisit $(A,\ \bar{A})$ comme système complet d'événements, avec $\mathcal{P}(A)\in]0,1[$

alors $\forall B\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}_A(B)\times\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}_{\bar{A}}(B)\times\mathcal{P}(\bar{A})$

Remarque : Si on représente la situation par un arbre pondéré, la formule des probabilités totales s'illustre par le fait que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y conduisent.

- **Exercice 21.8**

3.3 Formule de Bayes

Théorème 21.5 *Formule de Bayes.*
Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et un événement B tel que $\mathcal{P}(B) > 0$

① $\forall A\in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathcal{P}(A) > 0$, $\mathcal{P}_A(B) = \dfrac{\mathcal{P}_B(A)\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(A)}$ ou encore $\mathcal{P}(B|A) = \dfrac{\mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(A)}$

② Soit $(A_1,\dots,A_n)$ un système complet d'événements tels que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\mathcal{P}(A_i) > 0$.

$\forall i\in[\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathcal{P}_{A_i}(B)\mathcal{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n}\mathcal{P}_{A_k}(B)\times\mathcal{P}(A_k)}$ ou encore $\mathcal{P}_B(A_i|B) = \dfrac{\mathcal{P}(B|A_i)\mathcal{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n}\mathcal{P}(B|A_k)\times\mathcal{P}(A_k)}$

Démonstration :

① Il suffit d'appliquer la définition d'une probabilité conditionnelle.

② D'après ①, on a $\forall i\in[\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathcal{P}_{A_i}(B)\mathcal{P}(A_i)}{\mathcal{P}(B)}$.

Or d'après la formule des probabilités totales, $\mathcal{P}(B) = \sum_{k=1}^{n}\mathcal{P}_{A_k}(B)\times\mathcal{P}(A_k)$ et en remplaçant, on

obtient $\forall i\in[\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}_B(A_i) = \dfrac{\mathcal{P}_{A_i}(B)\mathcal{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n}\mathcal{P}_{A_k}(B)\times\mathcal{P}(A_k)}$

Dans la pratique : Cette formule permet d'inverser les causes et les conséquences. Elle se retrouve très facilement, en particulier si on a représenté la situation par un arbre pondéré. Il n'est pas très utile de la connaître par cœur.

Dans le cas fréquent où on a $(A,\bar{A})$ comme système complet d'événements avec $\mathcal{P}(A)\in]0,1[$ alors

$\forall B\in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{P}(B) > 0 \Rightarrow \mathcal{P}_B(A) = \dfrac{\mathcal{P}_A(B)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)} = \dfrac{\mathcal{P}_A(B)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}_A(B)\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}_{\bar{A}}(B)\mathcal{P}(\bar{A})}$

- **Exercice 21.13**

---

4. Evénements indépendants

4.1 Couples d'événements indépendants

Définition : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et $A,B\in\mathcal{P}(\Omega)$. Les événements A et B sont dits indépendants lorsque $\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A)\times \mathcal{P}(B)$

Remarque: Si A et B sont de probabilité non nulle on a
$\mathcal{P}_A(B) = \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}_B(A) = \mathcal{P}(A)$
Ainsi la probabilité de B est inchangée par la fait que A se réalise ou non et inversement, ce qui est cohérent avec l'idée intuitive d'indépendance.

Cas particulier :
★ A est indépendant de lui-même ssi $\mathcal{P}(A\cap A) = \mathcal{P}(A) = (\mathcal{P}(A))^2$ ssi $\mathcal{P}(A) \in \{0,1\}$.
★ A et $\bar{A}$ sont indépendants ssi $\mathcal{P}(A\cap\bar{A}) = \mathcal{P}(\emptyset) = 0 = \mathcal{P}(A)(1 - \mathcal{P}(A))$ ssi $\mathcal{P}(A) \in \{0,1\}$

Dans la pratique :
★ Le plus souvent c'est la modélisation choisie qui indique que des événements sont indépendants on peut alors utiliser $\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A)\ \mathcal{P}(B)$.

★ Si l'énoncé demande de prouver l'indépendance alors il faut établir l'égalité :
$\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A)\,\mathcal{P}(B)$.

Proposition 21.4 : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
① Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.
② Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

✍ Preuve :

4.2 Famille d'événements mutuellement indépendants.

Définition : Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et $A_1, A_2,\dots, A_n\in\mathcal{P}(\Omega)$.
Les événements $A_1, A_2,\dots, A_n$ sont <u>mutuellement indépendants</u> lorsque $\forall I \subset [\![1, n]\!]$,

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I}\mathcal{P}(A_i).$$

Exemple : 3 événements A, B, C de $P(\Omega)$ sont mutuellement indépendants ssi
$\mathcal{P}(A\cap B) = \mathcal{P}(A)\,\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(A\cap C) = \mathcal{P}(A)\,\mathcal{P}(C)$, $\mathcal{P}(B\cap C) = \mathcal{P}(B)\,\mathcal{P}(C)$ et $\mathcal{P}(A\cap B\cap C) = \mathcal{P}(A)\,\mathcal{P}(B)\mathcal{P}(C)$.

⚠ Attention : L'indépendance des événements deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

Proposition 21.5 :
① Tout sous-ensemble d'événements mutuellement indépendants est un ensemble d'événements mutuellement indépendants.
② Quand on a une famille d'événements mutuellement indépendants, on obtient encore une famille d'événements mutuellement indépendants si on remplace certains des A_i par leurs contraires.

Admis

- **Exercices : 21.9 et 21.10**