

Programme de colles-semaine 27 -25/05 au 29/05

Programme précédent

- Matrice de passage d'une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' , définition et propriété.
- Formule de changement de base pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes.
- Matrice semblable : définition, deux matrices semblables ont le même rang, Si A et B sont semblables, leurs puissances le sont aussi.
- Matrice d'un système linéaire, cohérence entre les différentes notions de rang.

II. Dénombrement

- Ensembles finis : définition d'un ensemble fini et de son cardinal, soit E un ensemble fini et F un ensemble, E et F sont en bijection ssi F est fini et $\text{card}(F) = \text{card}(E)$.
- Cardinal d'une partie. Si A et B sont deux parties disjointes de E alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$, généralisation à une famille de parties disjointes, partition de E , formule de Poincaré. (formule du crible HP vue pour la réunion de 3 parties). Preuve de $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ par récurrence.
- Cardinal du produit cartésien de p ensembles finis
- Soit E fini, si il existe une injection de E dans F alors $\text{card}(E) = \text{card}(f(E)) \leq \text{card}(F)$, principe de Dirichlet.
si il existe une surjection de E sur F alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$,
- Si E et F sont finis de même cardinal alors f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective
- Notion de p -listes, si E est de cardinal n , le nombre de p -listes de E est n^p .
Le nombre d'application de E de cardinal p dans F de cardinal n est n^p
- Notion de p -arrangements, si E est de cardinal n , le nombre de p -arrangements de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Le nombre d'injections de E de cardinal p dans F de cardinal n

- Notion de permutation, si E est de cardinal n , le nombre de permutations de E est $n!$

Le nombre de bijection de E sur F de cardinal commun n est $n!$

- Notion de p -combinaison, le nombre de p -combinaison de E est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Preuves combinatoires des propriétés des entiers $\binom{n}{p}$.

- Exemples de calcul de nombre d'anagrammes
-

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Calcul du rang d'une matrice sur un exemple en dimension 3 ou 4 avec ou sans paramètre.
- Énoncer et justifier la formule de changement de base pour un endomorphisme.
- Preuve de $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ par récurrence.

② Un exercice classique de dénombrement utilisant des listes, des arrangements, des permutations, des combinaisons ou des anagrammes (exemples en page 2)

③ Exercice d'algèbre linéaire basé sur les changements de base, les matrices semblables. (Il ne manque que les déterminants).

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Exercices traités en classe

♥ 20.7 Soit E l'ensemble des nombres à 6 chiffres ne comportant aucun « 0 ».

1. Déterminer le cardinal de l'ensemble E .
2. Soit E_1 l'ensemble des nombres de E ayant six chiffres différents. Déterminer le cardinal de l'ensemble E_1 .
3. Soit E_2 l'ensemble des nombres pairs de E . Déterminer le cardinal de l'ensemble E_2 .
4. Soit E_3 l'ensemble des nombres de E dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits). Déterminer le cardinal de l'ensemble E_3 .

♥ 20.8 Combien y a-t-il de d'entiers qui s'écrivent exactement avec n chiffres significatifs avec $n \geq 3$, et dont exactement deux chiffres 8 ?

♥ 20.9 *Le pouilleux* : on rappelle qu'un jeu de 52 cartes contient 13 cartes de 4 couleurs différentes : pique, cœur, carreaux et trèfle, ainsi que 3 figures : roi, dame et valet à chaque couleur. On appelle main une partie extraite du jeu.

- a. Déterminer le nombre de mains de 8 cartes.
- b. Combien de ces mains contiennent le valet de pique ?
- c. Combien de ces mains contiennent au moins un valet ?
- d. Combien de ces mains contiennent au moins un valet et un pique ?
- e. Combien de ces mains contiennent exactement 3 piques dont le valet.
- f. Combien de ces mains contiennent exactement 3 piques et deux valets ?

20.10 Une urne contient des boules de deux couleurs : blanches et noires.

On tire successivement 5 fois une boule, en remettant la boule tirée après chaque tirage et on note les couleurs obtenues.

- a. Combien a-t-on de résultats différents ?
- b. Combien de résultats avec au moins deux boules de couleurs différentes ?
- c. Combien de résultats avec deux boules blanches et 3 noires ?
- d. Combien de résultats avec au plus deux boules noires ?
- e. Combien de résultats avec une boule blanche en dernier ?