

Programme de colles-semaine 28 -01/06 au 05/06

I. Dénombrement

Programme précédent

II. Probabilité sur un univers fini

- Expérience aléatoire, univers probabilisable $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega))$ associé (cette année Ω est fini), vocabulaire, événements et notation ensemblistes des événements A et B , A ou B , A mais pas B , le contraire de A , événements disjoints. Système complet d'événements, exemples.

- Une probabilité sur Ω est une application de $\mathcal{F}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et si A et B sont disjoints,

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Propriétés de calcul :

- Soit (p_1, \dots, p_n) une famille de n réels positifs de somme 1, il existe une unique probabilité \mathbb{P} sur

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ et $\forall A \in \mathcal{F}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$

- Définition de la probabilité uniforme sur Ω et mode de calcul de $\mathbb{P}(A)$ dans ce cas particulier.

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{F}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}_B : A \mapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur Ω

appelée probabilité sachant B .

- formule des probabilités composées, formules des probabilités totales, formules de Bayes.

- Indépendance de deux événements, famille d'événements mutuellement indépendants.

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Preuve de $\text{card}(\mathcal{F}(E)) = 2^n$ par récurrence.
- Énoncer la formule des probabilités composées avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.
- Énoncer la formule des probabilités totales avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.

② Un exercice classique de dénombrement utilisant des listes, des arrangements, des permutations, des combinaisons ou des anagrammes (exemples en page 2)

③ Exercice de probabilités (exemples en page 2)

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Quelques exercices traités en classe

♥ **20.7** Soit E l'ensemble des nombres à 6 chiffres ne comportant aucun « 0 ».

1. Déterminer le cardinal de l'ensemble E .
2. Soit E_1 l'ensemble des nombres de E ayant six chiffres différents. Déterminer le cardinal de l'ensemble E_1 .
3. Soit E_2 l'ensemble des nombres pairs de E . Déterminer le cardinal de l'ensemble E_2 .
4. Soit E_3 l'ensemble des nombres de E dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits). Déterminer le cardinal de l'ensemble E_3 .

♥ **20.9 Le pouilleux** : on rappelle qu'un jeu de 52 cartes contient 13 cartes de 4 couleurs différentes : pique, cœur, carreaux et trèfle, ainsi que 3 figures : roi, dame et valet à chaque couleur. On appelle main une partie extraite du jeu.

- a. Déterminer le nombre de mains de 8 cartes.
- b. Combien de ces mains contiennent le valet de pique ?
- c. Combien de ces mains contiennent au moins un valet ?
- d. Combien de ces mains contiennent au moins un valet et un pique ?
- e. Combien de ces mains contiennent exactement 3 piques dont le valet.
- f. Combien de ces mains contiennent exactement 3 piques et deux valets ?

20.3 Soit E un ensemble fini de cardinal n .

- a. Dénombrer les couples (A, B) de $\mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$.
- b. Dénombrer les couples (A, B) de $\mathcal{P}(E)$ tels que $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

20.4 Dans un jeu de 32 cartes, on considère une main de 16 cartes. Combien y-a-t-il de mains contenant exactement 3 rouges ? Exactement k rouges avec $0 \leq k \leq 16$.

S'inspirer de ce calcul pour démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

♥ **20.5 Formule de Vandermonde.**

Soit k, n et m trois entiers naturels tels que $k \leq n + m$. On considère A et B deux ensembles disjoints de cardinal respectif n et m , en dénombrant les parties de $E = A \cup B$ de cardinal k de deux manières différentes, établir que :

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

21.11 Un professeur imaginaire arrive devant la porte de sa salle, en retard, avec un gros trousseau contenant n clefs ($n \geq 2$).

- a. Il essaye au hasard chacune des clés en écartant celles qui n'ouvrent pas la porte. Calculer la probabilité de l'événement : A_k : « la porte s'ouvre au k ème essai », avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- b. La semaine suivante, même scénario mais en plus son collègue de chimie qui passe par là le distrait dans sa tâche, si bien qu'il n'écarte plus les clés en cas d'échec recalculer la probabilité de A_k .

21.12 Une rumeur circule dans le lycée : Le prochain DS de math commence à 9h (non...)

Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et la transmet fidèlement avec une probabilité $q = 1 - p$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que la n ème personne détienne la bonne information. On a trivialement $p_1 = 1$.

- a. Donner une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b. Expliciter p_n et déterminer $\lim p_n$.

21.13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n sacs notés S_1, \dots, S_n tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le sac S_k contient k jetons blancs et $(n + 1 - k)$ jetons rouges. On choisit un sac avec une probabilité égale à αk , $\alpha \in \mathbb{R}$, de choisir le sac S_k . Après quoi, on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

- a. Trouver la valeur de α .
- b. Le jeton pioché est blanc, exprimer en fonction de $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité que ce jeton provienne du sac S_k .

21.14 On joue avec une pièce de monnaie qui amène pile avec la probabilité $a \in]0, 1[$. Pile donne un point et face deux points. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on lance la pièce jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre de points égale ou supérieur à n . On note p_n la probabilité d'obtenir exactement n points.

- a. Calculer p_1 et p_2
- b. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+2} en fonction de p_{n+1} et p_n .
- c. Expliciter p_n et étudier sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.