

Chapitre 20: Dénombrement-POLY

1 Définition, notion de cardinal

Dans ce paragraphe E désigne un ensemble et n un entier naturel non nul.

Def : E est un ensemble fini lorsque E est vide ou lorsqu'il existe une bijection de E sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

L'entier n , si il existe, est unique, et est appelé cardinal de E . On note $\text{card}(E)$ ou $|E|$.

Par convention $\text{card}(\emptyset) = 0$

Remarques :

- Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.
- Toute bijection de E sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ permet de numéroter les éléments de E et donc on peut écrire :
 $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Exemples :

- Un singleton est un ensemble de cardinal 1
- $E = \llbracket p, n \rrbracket$ est un ensemble d'entiers de cardinal $(n - p + 1)$.

Preuve : L'application $\varphi : \llbracket p, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n - p + 1 \rrbracket$ définie par $\varphi(x) = x - p + 1$ est une bijection

Proposition 20.1 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et F un ensemble.

Il existe une bijection de E sur F si et seulement si F est fini et $\text{card}(F) = \text{card}(E)$

Dans la pratique : Pour montrer qu'un ensemble est fini et donner son cardinal, on peut le mettre en bijection avec un ensemble fini dont le cardinal est connu.

Proposition 20.2 : Soit E et F deux ensembles finis. Le produit cartésien $E \times F$ est fini et

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \cdot \text{card}(F)$$

Remarque : On peut généraliser par récurrence cette propriété à n ensembles finis E_1, \dots, E_n .

$$E_1 \times \dots \times E_n \text{ est un ensemble fini et } \text{Card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \prod_{i=1}^n \text{card}(E_i).$$

Et donc si E est fini, alors E^n est fini et $\text{Card}(E^n) = (\text{Card } E)^n$.

2. Parties d'un ensemble fini

2.1 Cardinal d'une partie d'un ensemble fini.

Proposition 20.3 : Soit E un ensemble fini et A une partie de E

A est finie avec $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$ de plus $\text{card}(A) = \text{card}(E) \Leftrightarrow A = E$

Admis

Dans la pratique :

- Pour démontrer l'égalité de deux ensembles finis, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des cardinaux.
- Si F est inclus dans E et si F est infini alors E est infini

2.2 Opérations sur les parties d'un ensemble fini.

a) Union disjointe, partition.

Proposition 20.4 : Soit A et B deux parties de E .

Si A et B sont disjointes alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Admis

⚠ Attention : Cette formule n'est pas générale, il faut bien vérifier l'hypothèse : $A \cap B = \emptyset$

Corollaire : Soit E un ensemble fini.

- ① Si $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille finie de parties disjointes de E alors $\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i)$
- ② Si A et B sont deux parties de E , alors $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$.
- ③ Si A est une partie de E alors $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

Def : On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E lorsque

$$\forall i \in I, A_i \neq \emptyset, \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \text{ et } E = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Exemples :

- Les entiers pairs et les entiers impairs sont une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$
- Les groupes de colles sont une partition de la PCSI2

Proposition 20.5: Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille partition de E alors $\text{card}(E) = \sum_{i \in I} \text{card}(A_i)$

★ Méthode : Pour dénombrer un ensemble on peut trouver une famille partition dont les parties sont plus simples à dénombrer

Théorème 20.1: Soit E un ensemble fini de cardinal n , l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

b) Formule de Poincaré

Proposition 20.6: Soit A et B deux parties de E .

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

Remarque : Ceci est la formule générale pour le cardinal d'une réunion.

Remarques:

- La formule de Poincaré se généralise par la formule du crible qui est hors programme.

On peut retenir que, pour 3 parties A, B, C de E , on a :

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

Et retenir que, en général, $\text{Card}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \text{Card}(A_i)$

- $(\{x\})_{x \in E}$ est une partition de E , donc $\text{card}(E) = \sum_{x \in E} \text{card}(\{x\}) = \sum_{x \in E} 1$.

$$\text{Si } A \text{ est une partie de } E, \text{ alors } \text{card}(A) = \sum_{x \in A} \text{card}(\{x\}) = \sum_{x \in A} 1 + \sum_{x \in A} 0 = \sum_{x \in E} \mathbb{I}_A(x)$$

On retrouve alors facilement la formule de Poincaré en utilisant les indicatrices de $A \cup B$ et de $A \cap B$.

2.3 Applications entre ensembles finis

Proposition 20.7 : Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$

- ① Si f est injective alors $\text{card}(E) = \text{card}(f(E)) \leq \text{card}(F)$
- ② Si f est surjective alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$
- ③ Si f est bijective alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

Conséquence : Soit E et F deux ensembles finis, la contraposée de ① est :

Si $\text{card}(E) > \text{card}(F)$ il ne peut y avoir d'injections de E dans F, ceci est à la base du principe de Dirichlet ou principe des tiroirs : Si on range $(n + 1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs alors au moins un des tiroirs contient deux paires de chaussettes.

Théorème 20.2 : Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal $n \geq 1$ et $f : E \rightarrow F$
On a les équivalences : f est surjective $\Leftrightarrow f$ est injective $\Leftrightarrow f$ est bijective

Preuve : Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal.

- Supposons f injective. f induit une bijection $g : E \rightarrow f(E)$ et donc $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E) = \text{card}(F)$ et comme $f(E)$ est une partie de F, on en déduit que $f(E) = F$ donc que f est surjective et donc f est bijective.

- On montre par l'absurde que surjective \Rightarrow injective.

La négation de cette implication (non P ou Q) f est surjective et non injective (P et non Q)

Supposons f surjective et non injective.

On a $f(E) = F$ et f n'est pas injective donc $\text{card}(f(E)) < \text{card}(E) \Leftrightarrow \text{card}(E) > \text{card}(F)$, ce qui est absurde.

Ainsi on a bien f surjective $\Rightarrow f$ injective et donc f bijective.

- Les autres implications sont triviales.

★ Dans la pratique : Si on $f : E \rightarrow F$ avec E et F finis et de même cardinal alors pour montrer que f est bijective il suffit de montrer qu'elle est injective ou surjective.

Si $f : E \rightarrow E$, on a les équivalences : f est surjective $\Leftrightarrow f$ est injective $\Leftrightarrow f$ est bijective

Dans ce cas on dit que f est une permutation de E.

3. Outils pour le dénombrement

Dans la pratique, on essaiera le plus possible de modéliser les ensembles à dénombrer par les notions de ce paragraphe.

3.1 p-listes

Def : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et $p \in \mathbb{N}$. On appelle p-liste de E ou p-uplet d'éléments de E, un élément (x_1, x_2, \dots, x_p) de E^p

★ Remarque : Il s'agit d'une liste ordonnée de p éléments de E avec possibilité de répétitions. Elle **modélise le résultat de p tirages successifs avec remise**.

Exemple : Un code PIN à 4 chiffres est une 4-liste de $E = \llbracket 0, 9 \rrbracket$

Proposition 20.8 : Soit E un ensemble fini de cardinal n, le nombre de p-listes de E est $\text{card}(E^p) = n^p$

Corollaire : Soit E et F deux ensembles finis de cardinal respectifs p et n.

L'ensemble des applications de E dans F, $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ est fini et $\text{card}(F^E) = (\text{card}(F))^{\text{card}(E)} = n^p$

3.2 p-arrangements, permutations

Def : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- On appelle p-arrangement ou arrangement de p éléments de E, une p-liste d'éléments distincts.
- On appelle permutation de E un arrangement de n éléments de E.

★ Remarque : Il s'agit d'une liste ordonnée de p éléments de E sans possibilité de répétitions. Elle **modélise le résultat de p tirages successifs sans remise**.

Exemple : Un podium est un 3-arrangement de $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ pour une course avec n participants.

Proposition 20.9 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

① Le nombre de p -arrangements de E est $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

② le nombre de permutations de E est $n!$

Corollaire : Soit E et F deux ensembles finis de cardinal p et n .

① Si $p \leq n$, le nombre d'injections de E dans F est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

② Si $n = p$, le nombre de bijections de E dans F est $n!$

3.3 p -combinaisons

Def : Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On appelle p -combinaison de E , une partie de E de cardinal $p : \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$

★ Remarque : Il s'agit d'une liste non ordonnée de p éléments de E , sans possibilité de répétitions. Elle **modélise le résultat d'un tirage simultané de p éléments de E .**

Exemple : Un trinôme de colle est une 3-combinaison de $E = \text{PCSI2}$

Proposition 20.10: Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Le nombre de p -combinaisons de E est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Application : Preuves combinatoires des propriétés des coefficients binomiaux :

Rappels :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p} \quad \text{et } p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1} \quad (*)$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Preuves de (*).

Soit n et p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$. On veut dénombrer deux façons différentes le nombre d'équipes de p joueurs donc un capitaine choisis parmi n joueurs.

Méthode 1 : On choisit les p équipiers puis un capitaine parmi ceux-ci : $p \binom{n}{p}$.

Méthode 2 : On choisit un capitaine parmi les n joueurs et il choisit ces coéquipiers : $n \binom{n-1}{p-1}$.

$$\text{CCI : } p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1} \quad \text{formule du capitaine}$$

3.4 Anagrammes

Def : On considère une liste ordonnée de symbole qu'on appelle « mot ». Une anagramme de ce mot est un mot obtenu par permutation des symboles du mot initial.

Exemples : HATM est une anagramme de MATH et 110100 est une anagramme de 111000

Cas des lettres deux à deux distinctes : Il y a $4!$ anagrammes de MATH

Cas où des lettres sont identiques : Il y a $\frac{11!}{5!2!2!} = \binom{11}{5} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1}$ anagrammes de

ABRACADABRA

