

Exercices - Chapitre 23: Intégration sur un segment

♦ Eléments de correction en ligne - ♥ A savoir refaire

♥ Exercices du cours

23.1 a. Soit p et q des entiers tels que $p < q$. calculer $\int_p^q \lfloor t \rfloor dt$

b. En utilisant la subdivision, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = \frac{k}{n}$, calculer $\int_0^1 x dx$ en utilisant la définition.

23.2 Soit f continue sur $[-1, 1]$ déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 t^n f(t) dt$

23.3 **Lemme de Lebesgue:** Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$.

On pose, pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$.

a. Justifier l'existence des réels $M = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ et $M' = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$

b. Montrer que: $\forall n \geq 1$, $|I_n| \leq \frac{2M + (b-a)M'}{n}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.

23.4 Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$ et $\int_0^1 t f(t) dt = 0$.

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0, 1]$.

23.5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si $\int_0^1 t^2 \tilde{P}^2(t) dt = 0$ alors P est le polynôme nul.

23.6 Formules et inégalité de la moyenne

a. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ la valeur moyenne de f .

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.

b. Soit f et g continues sur $[a, b]$, montrer que $\left| \int_a^b fg \right| \leq \sup_{[a, b]} |f| \times \int_a^b |g|$

23.7 Déterminer les limites des suites suivantes:

$$a) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \quad b) S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+n} \quad c) P_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (n+k)^{\frac{1}{n}} \quad d) v_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha \quad (\alpha > 0)$$

23.8 On considère la fonction φ définie par $\varphi : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ .

b. Etudier la parité de φ et en déduire un domaine d'étude.

c. Déterminer la dérivée de φ et en déduire son tableau de variations sur $]0, 2\pi]$

d. Etudier la limite de φ en 0. Peut-on prolonger φ par continuité en 0 ? Si oui, son prolongement est-il dérivable en 0 ?

e. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la limite de φ en $+\infty$.

23.9 Démontrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

23.10 Montrer que, $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$ et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$$

♦ **Autres exercices**

23.11 Soit f continue sur $[a, b]$ avec $a < b$.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \int_a^b x^k f(x) dx = 0$.

Montrer que f s'annule au moins $(n + 1)$ fois sur $]a, b[$

Indication : Commencer par montrer que f s'annule au moins une fois en changeant de signe, puis par l'absurde supposer que f s'annule moins de n fois en changeant de signe. On pourra introduire le polynôme $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_p)$ où a_1, a_2, \dots, a_p sont les zéros de f et $1 \leq p \leq n$.

23.12 Soit f continue sur $[0, 1]$ et telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$, montrer que f admet un point fixe.

23.13 Donner des CNS sur f continue sur $[a, b]$ pour que $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$.

23.14 Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, telle que $f(1) = 0$, démontrer que: $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$

23.15 Déterminer les limites des suites suivantes:

$$\text{a) } I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx \quad \text{b) } I_n = \int_0^1 x^n \sin(nx) dx \quad \text{c) } I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx \quad \text{d) } I_n = \frac{1}{n} \int_n^{2n} \text{Arctan } x dx$$

23.16 Déterminer les limites des suites suivantes.

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} \quad b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

23.17 Trouver un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$

23.18 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

a. Déterminer I_0, I_1 et $I_n + I_{n+2}$.

b. Etudier la convergence de $(I_n)_{n \geq 0}$.

c. En déduire un équivalent de $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$.

23.19 Soit f de classe C^4 sur \mathbb{R} telle que $f'(a) = f''(a) = f^{(3)}(a) = 0$ et $f^{(4)}(a) > 0$.

Montrer que f admet un minimum local en a .

23.20 Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$.

Etudier la dérivabilité de f et donner sa dérivée. Donner le DL₈(0) de f

23.21 On considère la fonction : $g : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{te^t}$

a. Donner l'ensemble de définition de g

b. Montrer que $\forall x \neq 0, e^{-2x} \ln(2) \leq g(x) \leq e^{-x} \ln(2)$. En déduire que g est prolongeable par continuité en 0.

c. Etudier la dérivabilité de g sur son ensemble de définition et donner son tableau de variations

Problème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

On appelle intégrale de Wallis le réel $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ où $n \in \mathbb{N}$

Partie 1: Propriétés de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.a. Calculer I_0 et I_1 , puis justifier, à l'aide d'un changement de variable que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt.$$

b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+1} \leq I_n$, puis que I converge vers $\ell, \ell \geq 0$.

2.a. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

2.b. En déduire que $I_{n+1} \sim I_n$.

3. Utiliser la question précédente pour démontrer l'une des deux égalités suivantes:

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

1^{ère} formule de Wallis

4. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2^{4p} (p!)^4}{p(2p)!^2} = \pi$

2^{ème} formule de Wallis

Partie 2: Recherche d'un équivalent de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. : $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = (n+1)I_n I_{n+1}$.

5.a. Calculer S_{n+1} en fonction de S_n , en déduire l'expression de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.b. Déterminer un équivalent de la suite $(nI_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$.

5.c. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puis la limite de (I_n) .

Partie 3: Formule de Stirling: On cherche à établir le résultat suivant: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

6. Dans cette question on montre que $n!$ à un équivalent de la forme $\lambda \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On utilisera les suites définies sur \mathbb{N}^* : $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$ $v_n = \ln u_n$ $w_n = \ln(e^{-\frac{1}{n}} u_n)$

6.a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

6.b. En utilisant un DL usuel, que $v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{12n^2}$.

6.c. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n(n+1)} + v_{n+1} - v_n$, puis que $w_{n+1} - w_n \sim \frac{11}{12n^2}$.

6.d. Justifier que v et w sont adjacentes à partir d'un certain rang et en déduire que u est convergente vers un réel $\lambda > 0$.

6.e. Justifier que : $n! \sim \lambda \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

7. Utiliser la deuxième formule de Wallis et le résultat précédent pour établir la formule de

Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$