# Programme de colles-semaine 29 -08/06 au 12/06

---

**I. Probabilité sur un univers fini**

***Programme précédent***

**II. Variables aléatoires**

- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini, une variable aléatoire sur $\Omega$ est une application de $\Omega$ dans un ensemble E. $X(\Omega)$ est l'ensemble fini des valeurs prises par X. On note $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A)$ pour toute partie de A et plus particulièrement $(X = k)$ si $A = \{k\}$
- Loi d'une variable aléatoire, lois usuelles : loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- Opérations sur les va réelles, composition par une fonction définie sur $X(\Omega)$, loi de $Y = f(X)$.
- Loi conditionnelle sachant A avec $P(A) > 0$,.
- Couple de variables aléatoire, loi conjointe et loi marginale, loi de $f(X,Y)$, exemple de la somme.
- Famille de n variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes. Lemme des coalitions, application à la loi de la somme de n variables de Bernoulli iid.
- Espérance d'une variable aléatoire, différentes écritures, linéarité, positivité, croissance, théorème de transfert. Si X et Y sont ind alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Variance et écart-type d'une variable aléatoire, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
- Espérance et variance des lois usuelles.
- Covariance de deux VA, définition, $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$.
- Inégalité de Markov et de Bienaymé Tchebychev, loi faible des grands nombres.

---

**Déroulement de la colle:**

① Deux questions de cours parmi les suivantes

- Enoncer la formule des probabilités composées avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.
- Enoncer la formule des probabilités totales avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.
- Enoncé des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev et preuve de l'une des deux.
- Définition de X suit une loi binomiale de paramètre (n, p), espérance (preuve) et variance.
- Définition de X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ espérance et variance (preuve).
- Enoncé et démonstration de la formule de Koenig-Huygens.

② Un exercice sur le thème Proba, VA.

*Un DS sur ce programme de colle aura lieu le jeudi 11 juin*

*Quelques exos du TD en page 2*

**Quelques exercices traités en classe**

**22.7** Soit n un entier naturel non nul. On choisit au hasard, un nombre entier X dans $[\![1, n]\!]$, puis, au hasard, un nombre entier Y dans $[\![1, X]\!]$.

**a.** Déterminer la loi du couple (X, Y).
**b.** Déterminer la loi de Y.
**c.** Calculer l'espérance de Y

**22.8** On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur le même espace probabilisé et suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $m = \min(X_1, X_2,\ldots,X_n)$.

**a.** Déterminer la loi probabilité de l'événement $P(m \geq k)$ pour tout $k\in[\![1, n]\!]$
**b.** En déduire la loi de m
**c.** Montrer que $P(\exists i\in[\![1, n]\!], X_i = 1) \geq 1 - 1/e$

**22.12** Calvin jette n boulettes de papier sur Susie avec une probabilité $p\in]0,1[$ de l'atteindre. Chaque lancer est indépendants des précédents. On note X le numéro de la première boulette qui fait mouche (avec X = 0 si Susie évite toutes les boulettes).

**a.** Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
**b.** Calvin a atteint Susie. Quelle est la probabilité que cela se soit produit dès le 1^er^ jet ?

**22.16** ***Urne de Polya***

Une urne contient initialement a boules rouges et b boules bleues avec a et b non nuls.
On effectue des tirages successifs au cours desquels on remet la boule tirée et on ajoute dans l'urne une boule de même couleur. Ainsi, après chaque tirage, l'urne compte une boule de plus.
On note, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $X_k$ égale à 1 si la k-ième boule tirée est rouge et égale à 0 sinon. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ , la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages.

**a.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les lois conditionnelles de $X_{n+1}$ sachant $(Y_n = k)$
**b.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Etablir une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(Y_n)$.
**c.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que : $E(Y_{n+1}) = E(Y_n) + \dfrac{1}{n+a+b} E(Y_n) + \dfrac{a}{n+a+b}$
**d.** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $E(Y_n) = \dfrac{na}{a+b}$ et en déduire la probabilité de tirer une boule rouge dans l'urne au nième tirage.

**22.19** On considère n joueurs qui tirent à la carabine sur une cible. Chaque joueur dispose de 2 coups, et touche la cible avec une probabilité p. Les différents joueurs et les différents tirs sont supposés indépendants.

**a**. On note $X_1$ le nombre de tireurs qui touchent la cible au premier tir, et $X_2$ le nombre de tireurs qui touchent au second tir. Donner les lois de $X_1$, $X_2$, $X_1 + X_2$.
**b**. On note A le nombre de tireurs touchant la cible lors de leurs deux essais et B le nombre de tireurs touchant la cible sur un seul des deux essais. Donner les lois de A et B.
**c**. Exprimer $X_1 + X_2$ en fonction de A et B puis en déduire Cov(A, B). Interpréter le résultat.