Chapitre 25: Déterminants-poly de cours

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geq 2$.

1. Déterminant d'une famille de vecteurs :

1.1 Forme n-linéaire sur E

Def: $\varphi: E^n \to \mathbb{K}$ est une forme multilinéaire ou n-linéaire sur E lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables , c'est à dire, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i : \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ u_i \mapsto \varphi(u_1, \dots, u_i, \dots u_n) \end{cases}$ est linéaire.

✍ Exemple en dimension 3 :

Propriétés immédiates: Soit $\varphi: E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.
Si il existe $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i = 0_E$ alors $\varphi(u_1, \dots, u_n) = 0$

Def : Soit $\varphi: E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E .

① φ est alternée si lorsque deux vecteurs des n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont égaux, $\varphi(u_1, \dots, u_n) = 0$
② φ est antisymétrique lorsque $\varphi(u_1,\dots, u_n)$ est changé en son opposé lorsqu'on permute deux vecteurs.

Proposition 25.1 : Soit $\varphi: E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E, φ est alternée ssi φ est antisymétrique

✍ **Preuve** :

1.2 Déterminant d'une famille de vecteur dans une base

Théorème 25.1 : L'ensemble des formes n- linéaires alternées sur E est un espace vectoriel de dimension 1

Admis *C'est un SEV de l'EV des applications de E^n dans $\mathbb{K}$*

Def: Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, on appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\det_{\mathcal{B}}$, l'unique forme n-linéaire alternée vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.
Pour toute famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est le déterminant de la famille dans la base $\mathcal{B}$.

Propriétés immédiates :
① Si il existe $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i = 0_E$ alors $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$
② Si deux vecteurs des n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont égaux, $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$
③ $\det_{\mathcal{B}}(u_1,\dots, u_n)$ est changé en son opposé lorsqu'on permute deux vecteurs.
④ $\forall \lambda \in K$, $\forall (u_1,\dots, u_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) = \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(u_1,\dots, u_n)$.

✍ **En effet**:

Proposition 25.2 : Soit φ: $E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
$\exists \lambda \in K$, $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ et on a $\lambda = \varphi(e_1, e_2, \dots, e_n)$

✍ **Preuve**:

1.3 Caractérisation des bases :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Proposition 25.3 : Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E
① Si $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors $\det_{\mathcal{B}}((u_1, \dots, u_n) = 0$
② Si deux des vecteurs de $(u_1, \dots, u_n)$ sont colinéaires alors $\det_{\mathcal{B}}((u_1, \dots, u_n) = 0$

✍ **Preuve** :

Proposition 25.4 : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E alors
$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$

✍ **Preuve** :

Théorème 25.2 : Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
$(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$

✍ **Preuve** :

1.4 Expression du déterminant en dim 2 et 3

a) En dimension 2

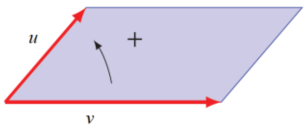
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme bilinéaire alternée.
Soit $(u, v)\in E^2$, on a $u = x_1e_1 + x_2e_2$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2$
Cherchons l'expression de $\det_{\mathcal{B}}(u, v)$

Proposition 25.5: Soit $(u, v)\in E^2$ avec $u = x_1e_1 + x_2e_2$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2$.

$$\det_B(u,v) = x_1y_2 - x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Interprétation du déterminant dans la base canonique :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$.
L'application : $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
$(u, v) \longmapsto$ aire algébrique du parallélogramme formé sur (u, v)



Cette application est : - linéaire par rapport à chacune des variables.
- alternée : $\forall u\in\mathbb{R}^2$, $\varphi(u, u) = 0$
- $\varphi(e_1, e_2) = 1$ (unité d'aire)

On a donc : $\varphi = \det_{\mathcal{B}}$.

b) En dimension 3:

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme trilinéaire alternée.
Soit $(u, v, w)\in E^2$, on a $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ et $w = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$
Cherchons l'expression de $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$:

Proposition 25.6: Soit $(u, v, w) \in E^3$ avec $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ et $w = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$

$$\det_B(u,v,w) = x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_2(y_1z_3 - z_1y_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$
$$= x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

On a développé par rapport à la première colonne

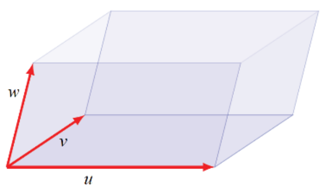
✍ **Exercice**: Vérifier qu'on obtient la même expression en développant par rapport à la deuxième ligne ou par rapport à la troisième colonne

Interprétation du déterminant dans la base canonique :

On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$.

On considère $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(u, v, w) \longmapsto$ volume algébrique du parallélépipède formé sur (u, v, w)



Cette application est linéaire par rapport à chacune des variables, alternée et vérifie :

$\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$. (unité de volume)

On a donc : $\varphi = \det_{\mathcal{B}}$

2 Déterminant d'une matrice carrée :

2.1 Définition et propriétés immédiates

Def : On appelle déterminant de la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note : det(A).

Notation : Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, on note det(A) = $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

♥ Propriétés immédiates :

① L'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est l'unique forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de sa variable qui vérifie : det I_n = 1

② Le déterminant d'une matrice carrée ayant une colonne nulle est nul.

③ Le déterminant d'une matrice carrée ayant deux colonnes égales est nul.

④ Le déterminant d'une matrice carrée ayant deux colonnes proportionnelles est nul

⑤ Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres alors det(A) = 0

⑥ Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres alors det(A) = 0.

⑦ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

2.2 Caractérisation des matrices inversibles :

Proposition 25.7 : Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

① det(AB) = det(A)det(B)

② $\forall p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = (\det(A))^p$

③ Si $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$et dans ce cas $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

✍ **Preuve**:

2.3 Calcul pratique du déterminant d'une matrice carrée

a) Développement par rapport à une ligne ou à une colonne

Def: Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A^{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A. On appelle mineur d'indice (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de $A^{i,j}$.

Exemple:

Proposition 25.8 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

① $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_0+j}a_{i_0,j}\Delta_{i_0,j}$ *développement selon la ligne i_0*

② $\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}a_{i,j_0}\Delta_{i,j_0}$ *développement selon la colonne j_0*

Ce qui donne par exemple, pour une matrice 3×3, en développant selon la deuxième ligne:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = -a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{13} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{2,2}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,3}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Les signes à utiliser peuvent être mémorisés comme suit: $\begin{vmatrix} + & - & \cdots \\ - & + & \vdots \\ \vdots & \cdots & + \end{vmatrix}$.

Corollaire : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

① Si A est triangulaire, son déterminant est le produit de ses termes diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & a_n \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2\begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & a_n \end{vmatrix} = \ldots = a_1 a_2 \ldots a_n$$

② Si A est diagonale, son déterminant est le produit de ses termes diagonaux

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \ldots a_n$$

b) Effet des opérations élémentaires sur les colonnes (OEC) de A

Proposition 25.9: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

① Si $A \underset{C_i \leftrightarrow C_j}{\sim} A'$ alors det(A') = - det(A).

② Si $A \underset{C_i \leftrightarrow \lambda C_i}{\sim} A'$ alors det(A') = λdet(A)

③ Si $A \underset{C_i \leftrightarrow C_i + \lambda C_j}{\sim} A'$ alors det(A') = det(A) et plus généralement, ajouter à une colonne de A une CL des autres colonnes ne change pas le déterminant de A.

Preuve: Le déterminant est une forme n-linéaire symétrique et donc alternée pr rapport à ses colonnes.

c) Effets opérations élémentaires sur les lignes (OEL) de A

Proposition 25.10: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, det(A) = det($A^T$) *admis*

Conséquence : le det est une forme n-linéaire alternée par rapport à ses lignes.

Proposition 25.11: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

① Si $A \underset{L_i \leftrightarrow L_j}{\sim} A'$ alors det(A') = - det(A).

② Si $A \underset{L_i \leftrightarrow \lambda L_i}{\sim} A'$ alors det(A') = λdet(A)

③ Si $A \underset{L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_j}{\sim} A'$ alors det(A') = det(A) et plus généralement, ajouter à une colonne de A une CL des autres colonnes ne change pas le déterminant de A.

Méthode générale de calcul du déterminant d'une matrice carrée : On va donc utiliser des OEC ou des OEL (pivot de gauss par exemple) pour se ramener à une matrice triangulaire ou à une matrice contenant suffisamment de zéros pour que le calcul soit trivial ou amène une relation de récurrence

---

3. Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 25.12 et définition: Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $f \in \mathcal{L}(E)$, et M la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(M)$ est indépendant du choix de $\mathcal{B}$ et est appelé déterminant de f.

Preuve :

Dans la pratique: $\det(f) = \det(M) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1),\dots,f(e_n))$.

Proposition 25.13: Soit f, $g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

① $\det(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0$

② $\det(Id_E) = 1$

③ $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$

④ $\det(g \circ f) = \det(g).\det(f)$

⑤ f est un automorphisme $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

⑥ Si $f \in GL(E)$ alors $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$

✍ **Preuve** :