Exercices – Chapitre 25: Déterminants

♦ Eléments de correction en ligne- ♥ A savoir refaire

Calcul de déterminants

♦ **25.1** Calculer les déterminants suivants, le plus vite possible:

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

♥ **25.2** Soit a, b, c, $x \in \mathbb{R}$, calculer les déterminants suivants sous forme factorisée:

$D_1 = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$ $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$ $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$ où $j = e^{2i\pi/3}$

$D_5 = \begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix}$ $D_6 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ $D_7 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

♦ **25.3** ***En dimension 4***. Calculer les déterminants suivants où a, b, c et d sont des réels.

$D_1 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ $D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$

♥ **25.4** ***En dimension n***

a. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \in \mathbb{R}$.

b. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ où $n \geq 1$. *Indication: Ecrire une relation de récurrence.*

c. Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ & & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$ où a et b sont des complexes.

d. Calculer $\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & b \\ 0 & \ddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$ où a et b sont des complexes. (ordre 2n, $n \geq 1$)

On pourra développer deux fois selon deux colonnes bien choisies pour établir une relation de récurrence.

e. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a+b & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$ pour $n \geq 1$ et a, b réels.

Indication: Ecrire une relation de récurrence.

♦ **25.5** Calculer les déterminants suivants où a, $b \in \mathbb{R}$, en utilisant une relation de récurrence.

$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & \ddots & & \vdots \\ a^2 & ab & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & b & -1 \\ a^n & a^{n-1}b & \cdots & ab & b \end{vmatrix}$ $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$

25.6 On considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$.

Calculer det(M) et en déduire le rang de M et une base de Ker M.

25.7 *Déterminant de Vandermonde en dimension 3*

Calculer $V = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ où a, b, c $\in \mathbb{C}$.

25.8 Soit n un entier naturel impair. Démontrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, antisymétrique est de déterminant nul. Ce résultat est-il encore vrai lorsque n est pair ?

25.9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$, calculer det(A)

25.10 Soit n et p deux entiers non nuls distincts. On donne $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
calculer $\det(AB) \times \det(BA)$

Utilisation du déterminant en algèbre linéaire

♥ **25.11 *CNS d'inversibilité pour une matrice carrée***

a. Pour quels réels t, la matrice $\begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

b. Pour quelles valeurs de a, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

c. Soient a et b deux réels fixés. La matrice $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & b \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ b & 0 & b & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

♥ **25.12** Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f si et seulement si $\exists u \in E,\ u \neq 0_E,\ f(u) = \lambda u$. u est alors un vecteur propre associé à λ.

a. Démontrer les équivalences suivantes :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \Leftrightarrow \mathrm{rg}(\lambda I_3 - A) \Leftrightarrow \det(\lambda I_3 - A) = 0$$

b. Déterminer les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés.
c. Donner une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

♦ **25.13** On considère l'application u définie sur $\mathbb{R}^n[X]$ par $u(P) = XP' + P$.
a. Justifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n[X]$.
b. Calculer le déterminant de u.
c. Que peut-on en déduire ?

25.14 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On note *p* la projection sur F parallèlement à G et *s* la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Discuter, suivant les dimensions de F et G, les valeurs des déterminants de *p* et *s*.

♦ **25.15** Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n, montrer que si il existe un endomorphisme f de E tel que $f \circ f = -\mathrm{id}$, alors n est pair.

Avec des variables aléatoires

25.16 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

On pose $M = \begin{pmatrix} X & -1 & Y \\ 1 & 1 & 1 \\ -Y & XY & -X \end{pmatrix}$.

Calculer la probabilité que M soit inversible. Extrait de Oral de Centrale

25.17 Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les coefficients $(m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent toute la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
a. Donner la loi de $T = \mathrm{tr}(M)$
b. Calculer $E(\det(M))$ Oral Mines Telecom