

CALCULS ET ORDRE DANS R**I – Fractions :**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

II – Puissances

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad \forall n \geq 1, \quad a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^n \times a^m = a^{m+n} \quad (a^n)^m = a^{nm} \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

III – Racines carrées

Soit a un réel positif, le réel $\sqrt{a}$ est le réel positif qui élevé au carré donne a .

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, (\sqrt{a})^2 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

IV – Développer et factoriser

La multiplication est distributive sur l'addition

$$a(b+c) = ab+ac \quad (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

Gestion du signe -

$$a-(b+c) = a-b-c \quad (a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd \quad a-\frac{(b+c)}{d} = \frac{ad-b-c}{d}$$

Identités remarquables

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 & (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 & (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 & (a-b)(c-d) &= ac-ad-bc+bd \\ a^2-b^2 &= (a+b)(a-b) & a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \end{aligned}$$

Quantité conjuguée

La quantité conjuguée de $(a+b)$ est $(a-b)$, la quantité conjuguée de $(a-b)$ est $(a+b)$.
Multiplier par la quantité conjuguée permet de faire apparaître une différence de carré.

Exemple : $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$

V – Equation du second degré

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$. On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$. On pose $\Delta = b^2-4ac$.

• Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

On a la factorisation : $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ et donc le signe de ax^2+bx+c

la somme des racines vaut $S = \frac{-b}{a}$ et le produit des racines $P = \frac{c}{a}$

• Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle $x_0 = \frac{-b}{2a}$

On a la factorisation : $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$ et donc le signe de ax^2+bx+c

• Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solutions réelles (mais deux solutions complexes conjuguées)
le signe de ax^2+bx+c est celui de a .

VI – Ordre dans $\mathbb{R}$

Soit x et y deux réels, $x \leq y$ si et seulement si $y - x$ est positif.

Propriétés de la relation $x \leq y$:

Pour tous réels x, y et z on a : $x \leq x$

$$x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y$$

$$x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \text{ (transitivité)}$$

Règles pour la comparaison:

① Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence et utiliser les règles suivantes :

- La somme de deux réels positifs est positive.
- Le produit de deux réels de même signe est positif, le produit de deux réels de signes contraires est négatif.
- Un réel non nul et son inverse sont de même signe.
- Le carré d'un réel est positif et la racine carrée d'un réel positif est positive.

② Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et que leurs racines carrées.

③ Deux réels positifs, non nuls, sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse : $0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

Règles pour transformer les inégalités:

① On peut ajouter un réel quelconque aux deux membres d'une inégalité :

Pour x, y et z réels, on a : $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

② On peut multiplier par le même réel quelconque les deux membres d'une inégalité, sans changer son sens si ce nombre est positif, en changeant son sens s'il est négatif :

Pour x, y et z réels, on a : $x \leq y$ et $z \geq 0 \Rightarrow x \times z \leq y \times z$ et $x \leq y$ et $z \leq 0 \Rightarrow x \times z \geq y \times z$

③ On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens :

Pour a, b, c et d réels, on a : $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$

④ On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **portant sur des réels positifs** :

Pour a, b, c et d réels, on a : $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d \Rightarrow a \times c \leq b \times d$