

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Révisions : exercices de révision

 : exercices **difficiles**

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$

b) $\frac{2}{3} - 0,2$

d) $-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right)$

Calcul 1.2



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)$

b) $\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \times \frac{21}{24}$

c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

d) $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$

Calcul 1.3 — Un petit calcul.



Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible

Calcul 1.4 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\frac{4\,022}{(-4\,022)^2 + (-4\,021)(4\,023)}$...

c) $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$

b) $\frac{4\,021^2}{4\,020^2 + 4\,022^2 - 2}$

d) $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$...

Calcul 1.5 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Calcul 1.6 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

On utilisera la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$.

Calcul 1.7 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{c}$ avec a et b entiers et $c \in \mathbb{R}^*$.

- a) $\frac{29}{6}$ c) $\frac{3x-1}{x-2}$
- b) $\frac{k}{k-1}$

Calcul 1.8 — Un produit de fractions.



Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible

Comparaisons

Calcul 1.9 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$ b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$ c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$

Calcul 1.10 — Produit en croix (I).



Les nombres $A = \frac{33}{66} \frac{215}{317}$ et $B = \frac{104}{208} \frac{348}{341}$ sont-ils égaux ?

Calcul 1.11 — Produit en croix (II).



On pose $A = \frac{100\,001}{1\,000\,001}$ et $B = \frac{1\,000\,001}{10\,000\,001}$.

A-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Réponses mélangées

$\frac{7}{15}$ $A > B$ $\frac{203}{24}$ $2t$ $\frac{1}{6}$ $1 + \frac{1}{k-1}$ Non $4 + \frac{5}{6}$ 2

$1\,000$ $\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$ 247 $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{2}$ $4\,022$ $\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$ $-\frac{ab}{a-b}$ $\frac{16}{35}$

$3 + \frac{5}{x-2}$ $\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$ 9 $\frac{-10}{3}$ $\frac{n^3+n}{n+1}$ $\frac{3}{2}n$ 1 $\frac{-1}{n(n+1)^2}$

► Réponses et corrigés page 4

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) $\frac{1}{6}$

1.1 b) $\frac{7}{15}$

1.1 c) 9

1.1 d) $\frac{1}{9}$

1.2 a) 247

1.2 b) $\frac{203}{24}$

1.2 c) $-\frac{10}{3}$

1.2 d) $1\,000$

1.3 $\frac{16}{35}$

1.4 a) $4\,022$

1.4 b) $\frac{1}{2}$

1.4 c) 1

1.4 d) 2

1.5 a) $\frac{-1}{n(n+1)^2}$

1.5 b) $-\frac{ab}{a-b}$

1.5 c) $\frac{3}{2}n$

1.6 $\frac{n^3+n}{n+1}$

1.7 a) $4 + \frac{5}{6}$

1.7 b) $1 + \frac{1}{k-1}$

1.7 c) $3 + \frac{5}{x-2}$

1.8 $2t$

1.9 a) $\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$

1.9 b) $\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$

1.9 c) $\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$

1.10 Non

1.11 $A > B$

Corrigés

1.1 a) On met au même dénominateur : $\frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{6-4}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

1.1 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0,2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{2 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{7}{15}.$$

1.1 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{36 \times 15 \times 5}{25 \times 12 \times 1} = \frac{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 12 \times 1} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

1.1 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{2}{15} \times \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{15 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

1.2 a) On développe :

$$\begin{aligned} (2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) &= \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7} \\ &= 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 = 105 + 70 + 42 + 30 = 247. \end{aligned}$$

1.2 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24} &= \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5}\right) \times \frac{7}{8} \\ &= \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5}\right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15}\right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.\end{aligned}$$

1.2 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3(1-7)}{5^9 \times 7^3(1+2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.2 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1\,958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979} &= \frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,979 \times 21 + 21 + 1\,958}{1\,979 \times (1\,980 - 1\,978)} \\ &= \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21) + 1\,979}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21 + 1)}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times 2\,000}{1\,979 \times 2} \\ &= 1\,000.\end{aligned}$$

1.3 On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5} &= \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}} \\ &= \frac{3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.\end{aligned}$$

1.4 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\text{Donc : } \frac{4\,022}{(-4\,022)^2 + (-4\,021)(4\,023)} = \frac{4\,022}{(4\,022)^2 + (1-4\,022) \times (1+4\,022)} = \frac{4\,022}{(4\,022)^2 + 1 - 4\,022^2} = 4\,022.$$

1.4 b) On fait apparaître 4 021 dans 4 020 et 4 022 au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{4\,021^2}{4\,020^2 + 4\,022^2 - 2} &= \frac{4\,021^2}{(4\,021-1)^2 + (4\,021+1)^2 - 2} \\ &= \frac{4\,021^2}{4\,021^2 - 2 \times 4\,021 \times 1 + 1 + 1 + 4\,021^2 + 2 \times 4\,021 \times 1 + 1 - 2} \\ &= \frac{4\,021^2}{4\,021^2 - 2 \times 4\,021 \times 1 + 4\,021^2 + 2 \times 4\,021 \times 1} = \frac{4\,021^2}{4\,021^2 + 4\,021^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.4 c) En posant $a = 1\,234$, on a : $1\,235 = a + 1$ et $2\,469 = 2a + 1$. D'où :

$$\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235} = \frac{(a+1)(2a+1) - a}{a(2a+1) + a+1} = \frac{2a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 2a + 1} = 1.$$

1.4 d) En posant $a = 1\,000$, on a : $999 = a - 1$, $1\,001 = a + 1$, $1\,002 = a + 2$ et $4\,002 = 4a + 2$.

$$\text{Donc : } \frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001} = \frac{4a+2}{a(a+2) - (a-1)(a+1)} = \frac{2(2a+1)}{a^2 + 2a - (a^2 - 1)} = \frac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$$

1.5 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

1.5 b) On rappelle la formule : $a^3 - b^3 = (a-b)(ab + a^2 + b^2)$. Cela donne :

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)(ab + a^2 + b^2)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{ab + a^2 + b^2}{a-b} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$$

1.5 c) Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :

$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

1.6 On a :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k} = \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n^2+1)}{n+1} = \frac{n^3+n}{n+1}.$$

1.7 a) On trouve $\frac{29}{6} = \frac{4 \times 6 + 5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$.

1.7 b) On trouve $\frac{k}{k-1} = \frac{k-1+1}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}$.

1.7 c) On trouve $\frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = 3 + \frac{5}{x-2}$.

1.8 Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} - \frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{1+2t+t^2 - (1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB = \left(\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2} \right) \times (1+t^2)(1+t)^2 = 2t$.

1.9 a) On a $\frac{3}{5} = \frac{27}{45} > \frac{5}{9} = \frac{25}{45}$.

1.9 c) On a $\frac{125}{25} = 5 = \frac{105}{21}$.

1.10 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A = B$ si, et seulement si, $33\,215 \times 208\,341 = 66\,317 \times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est impair. En revanche, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. Ainsi, A et B ne sont pas égaux.

1.11 On réécrit $A = \frac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B = \frac{10^6+1}{10^7+1}$. Étudions les produits en croix.

- D'une part, on a $(10^5+1) \times (10^7+1) = 10^{12} + 10^7 + 10^5 + 1$.
- D'autre part, $(10^6+1)^2 = 10^{12} + 2 \times 10^6 + 1$.

Comme $(10^5+1) \times (10^7+1) > (10^6+1) \times (10^6+1)$, on obtient : $A > B$.