

Prérequis

Les identités remarquables.

Révisions : exercices de révision

 : exercices **difficiles**

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$

d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$

b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$

e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$

c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$

f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$

b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$

c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$

e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)\left(1 - \sqrt{2}x + x^2\right)$

f) $(x^2+x+1)^2$

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49$

b) $25 - (10x + 3)^2$

c) $(6x - 8)(4x - 5) + 36x^2 - 64$

d) $(-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64$

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ (où $a \neq 0$).

a) $x^2 - 2x + 1$

d) $3x^2 + 7x + 1$

b) $x^2 + 4x + 4$

e) $2x^2 + 3x - 28$

c) $x^2 + 3x + 2$

f) $-5x^2 + 6x - 1$

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.



Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x + y)^2 - z^2$

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$

c) $xy + x + y + 1$

d) $xy - x - y + 1$

e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$

f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.



Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $x^4 - 1$

b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$

c) $x^4 + x^2 + 1$

d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$

.....

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 2(3x - 4)(10x + 3) & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) & -2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4 & (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \\
 -5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right) & (x - 1)(y - 1) & 2 + x^3 - x^4 - x^5 & -8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4) \\
 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) & (x + y - z)(x + y + z) & (x + 1)(y + 1) & 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8} \\
 x^5 - x^3 + x^2 - 1 & (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) & x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 & (x + 2)^2 \\
 -28 + 21x & 1 + x^4 & x^4 + x^2 + 1 & (a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2) & 3(14x + 3y)(-4x + y) \\
 -6(6x + 7) & (x - 1)^2 & 3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right) & -1 - 3x - 3x^2 + x^3 \\
 x^5 - x^3 - x^2 + 1 & (x + y)(x + 1)^2 & 2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right) & 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 \\
 x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 & (x + 1)(x + 2) & 4(5x + 4)(-5x + 1) & -8(x + 1)(x + 16)
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 4

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

3.1 b) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

3.1 c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

3.1 d) $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

3.1 e) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$

3.1 f) $x^4 + x^2 + 1$

3.2 a) $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$

3.2 b) $-28 + 21x$

3.2 c) $2 + x^3 - x^4 - x^5$

3.2 d) $-1 - 3x - 3x^2 + x^3$

3.2 e) $1 + x^4$

3.2 f) $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

3.3 a) $-6(6x + 7)$

3.3 b) $4(5x + 4)(-5x + 1)$

3.3 c) $2(3x - 4)(10x + 3)$

3.3 d) $-8(x + 1)(x + 16)$

3.4 a) $(x - 1)^2$

3.4 b) $(x + 2)^2$

3.4 c) $(x + 1)(x + 2)$

3.4 d) $3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)$

3.4 e) $2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)$

3.4 f) $-5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$

3.5 a) $(x + y - z)(x + y + z)$

3.5 b) $3(14x + 3y)(-4x + y)$

3.5 c) $(x + 1)(y + 1)$

3.5 d) $(x - 1)(y - 1)$

3.5 e) $(x + y)(x + 1)^2$

3.5 f) $(a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2)$

3.6 a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

3.6 b) $-8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4)$

3.6 c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

3.6 d) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

3.6 e) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3(x^2 + x + 1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être « efficace », il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ et $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1) = [(x + 1)(x - 1)][(x + 1)(x^2 - x + 1)] = (x^2 - 1)(x^3 + 1) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1) = (x^2+2x+1)(x^3-1) = x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$.

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1) = (x^2-1)(x^3-1) = x^5-x^3-x^2+1$.

3.2 e) Grâce à « la troisième identité remarquable », on calcule astucieusement :

$$((x^2+1)+\sqrt{2}x)((x^2+1)-\sqrt{2}x) = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^4+2x^2+1) - 2x^2 = x^4+1.$$

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors :

$$-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 = -(6x+7)(6x-1) + (6x)^2 - 7^2 = (6x+7)[-(6x-1) + 6x - 7] = -6(6x+7).$$

3.3 b) On calcule $25 - (10x+3)^2 = 5^2 - (10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

3.4 c) La forme canonique est $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. On en déduit ensuite la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

3.4 d) La forme canonique est $3\left(\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right)$.

3.4 e) La forme canonique est $2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{233}{16}\right)$.

3.4 f) La forme canonique est $-5\left(\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right)$.

3.5 b) On calcule $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2 = (x+3y)^2 - (13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y) = 3(14x+3y)(-4x+y)$.

3.5 e) On calcule $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

3.6 a) On calcule $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$.

3.6 b) On a : $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64 = -8(x^2 + 1)(9x^2 - 24 - 8(x^2 - 1)) = -8(x^2 + 1)(x-4)(x+4)$.

3.6 c) On calcule $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations « $x^2 + x + 1 = 0$ » et « $x^2 - x + 1 = 0$ » n'ont pas de solutions réelles.

3.6 d) Une fois n'est pas coutume, on peut commencer par développer avant de factoriser. Ceci donne :

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !