

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Révisions : exercices de révision

 : exercices **difficiles**

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant garde à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

f) $\sqrt{(3 - a)^2}$

Calcul 4.2 — Des transformations d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})^2$

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3



Écrire les expressions suivantes sans racine carrée au dénominateur.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{b) } \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{c) } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{d) } \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \dots\dots\dots & \boxed{} \end{array}$$

Calcul 4.4 ⌚⌚⌚⌚

Écrire les expressions suivantes sans racine carrée au dénominateur.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{b) } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{c) } \frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{d) } \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} \right)^2 \dots\dots\dots & \boxed{} \end{array}$$

Calcul 4.5 — Un calcul plus difficile. ⌚⌚⌚⌚

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{}$$

Calculs variés

Calcul 4.6 — Mettre au carré. ⌚⌚⌚⌚

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \dots\dots\dots & \boxed{} \\ \text{b) } \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \dots\dots\dots & \boxed{} \end{array}$$

Calcul 4.7 ⌚⌚⌚⌚

On note $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$.

Simplifier A $\boxed{}$

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A .

Réponses mélangées

$\sqrt{3} - 1$	$\frac{1}{3}$	$ 3 - a $	$2\sqrt{2}$	5	$-(\sqrt{2} + \sqrt{3})$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$
$9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}$	$9 + 4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$\pi - 3$	$\sqrt{7} - 2$	$12\sqrt{7}$	$3 + \sqrt{2}$	
$50 - 25\sqrt{3}$	$2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$	$1 + \sqrt{3}$	$-\frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$				
$\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}$	$-\sqrt{3} + 2$	20	$1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}$	$3 - 2\sqrt{2}$	12	10	

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a)..... $\boxed{5}$

4.1 b)..... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c)..... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d)..... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e)..... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f)..... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a)..... $\boxed{20}$

4.2 b)..... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c)..... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d)..... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e)..... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f)..... $\boxed{12}$

4.2 g)..... $\boxed{9-\frac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h)..... $\boxed{10}$

4.3 a)..... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b)..... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c)..... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d)..... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.4 a)..... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.4 b)..... $\boxed{-\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.4 c)..... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.4 d)..... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.5..... $\boxed{\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

4.6 a)..... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.6 b)..... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.7..... $\boxed{1}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leq 3$ et $a-3$ si $a \geq 3$.

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}.$$

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2} = \frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} \\ &= 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

4.5 On pose $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+(\sqrt{2}+\sqrt{3}))(1-(\sqrt{2}+\sqrt{3}))} = \frac{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a :

$$A = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)(4-2\sqrt{6})}{(4+2\sqrt{6})(4-2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$, ce qu'on cherchait.

.....
4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \geq 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.
.....

4.7 Appelons A ce nombre, et écrivons-le $A = \alpha - \beta$ en posant :

$$\alpha = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a :

$$\begin{aligned} A^3 &= \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta) \\ &= 6 - 3A \sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)\left(-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a finalement $A^3 = 6 - 5A$, ce qui est équivalent à $(A-1)(A^2 + A + 6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3 + 5t - 6 = 0$. Finalement, comme 1 est l'unique racine réelle de cette équation, on trouve $A = 1$.
.....