

Exponentielles et logarithmes

Prérequis

Exponentielle, logarithme.

Révisions : exercices de révision

 : exercices **difficiles**

Logarithmes

Calcul 6.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln(16)$

d) $\frac{1}{8} \ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{8}\right)$

b) $\ln(512)$

e) $\ln(72) - 2 \ln(3)$

c) $\ln(0,125)$

f) $\ln(36)$

Calcul 6.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln\left(\frac{1}{12}\right)$

d) $\ln(500)$

b) $\ln(2,25)$

e) $\ln\left(\frac{16}{25}\right)$

c) $\ln(21) + 2 \ln(14) - 3 \ln(0,875)$..

f) $\ln(6,25)$

Calcul 6.3 — Une somme « télescopique ».

Calculer le nombre suivant en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

$$A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right)$$

Calcul 6.4 — Logarithmes et radicaux.



a) On pose $\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1)$. Calculer $(1 + \sqrt{2})^2$ et $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2} - 1)$

b) Calculer β sachant que $\ln(\beta) = \ln(7 + 5\sqrt{2}) + 8 \ln(\sqrt{2} + 1) + 7 \ln(\sqrt{2} - 1)$

c) Simplifier $\gamma = \ln\left((2 + \sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2 - \sqrt{3})^{20}\right)$

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Exponentielles

Calcul 6.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3\ln(2)}$

d) $e^{-2\ln(3)}$

b) $\ln(\sqrt{e})$

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

f) $e^{\ln(3)-\ln(2)}$

Calcul 6.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

b) $e^{-\ln(\ln(2))}$

e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$

c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$

f) $\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$

Études de fonctions

Calcul 6.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{1515+x}{1515-x}$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

▲ Calcul 6.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Montrer que, pour tous réels a et b , on a $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Calcul 6.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) $f(2e^x - 1)$ | <input type="text"/> | d) $xf'(x) - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ | <input type="text"/> | | |

Équations, inéquations

Calcul 6.10



Résoudre les inéquations suivantes (d'inconnue x).

- | | | | |
|------------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $e^{3x-5} \geq 12$ | <input type="text"/> | c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ | <input type="text"/> |
| b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ | <input type="text"/> | d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ | <input type="text"/> |

Calcul 6.11



Résoudre les équations suivantes (d'inconnue x).

- | | |
|---|----------------------|
| a) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ | <input type="text"/> |
| b) $\ln(-x-5) = \ln\left(\frac{x-61}{x+7}\right)$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

1	$2 \ln(5) - 2 \ln 2$	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$	$-2 \ln(2) - 2 \ln(5)$	-17	$-3 \ln(2)$	8
$\ln(3) + 11 \ln(2)$	1	-1	$\mathbb{R}$	impaire	$3 \ln(5) + 2 \ln(2)$	$x + \ln(2)$
impaire	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$	$4 \ln(2)$	$2 \ln(2) + 2 \ln(3)$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{\ln 2}$	ok	$\frac{1}{2} \ln(2)$	-2	0	$x \in [0, 1]$	$17 + 12\sqrt{2}$
$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$	$x \geq \frac{2}{e}$	impaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\emptyset$	$\frac{3}{2}$
$-2 \ln(5) + 4 \ln 2$	$\frac{1}{3}$	$2 \ln(3) - 2 \ln(2)$	$-\ln(3) - 2 \ln(2)$	$x \geq -\frac{1}{12}$	$9 \ln(2)$	e

► Réponses et corrigés page 4

Fiche n° 6. Exponentielles et logarithmes

Réponses

6.1 a)	$4 \ln(2)$	6.5 a)	8	6.8 a)	$\mathbb{R}$
6.1 b)	$9 \ln(2)$	6.5 b)	$\frac{1}{2}$	6.8 b)	ok
6.1 c)	$-3 \ln(2)$	6.5 c)	$\frac{1}{3}$	6.8 c)	1
6.1 d)	$\frac{1}{2} \ln(2)$	6.5 d)	$\frac{1}{9}$	6.8 d)	-1
6.1 e)	$3 \ln(2)$	6.5 e)	$-\frac{1}{2}$	6.9 a)	$x + \ln(2)$
6.1 f)	$2 \ln(2) + 2 \ln(3)$	6.5 f)	$\frac{3}{2}$	6.9 b)	$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
6.2 a)	$-\ln(3) - 2 \ln(2)$	6.6 a)	-2	6.9 c)	$\ln x-1 $
6.2 b)	$2 \ln(3) - 2 \ln(2)$	6.6 b)	$\frac{1}{\ln 2}$	6.9 d)	$-\frac{1}{1+x}$
6.2 c)	$\ln(3) + 11 \ln(2)$	6.6 c)	-17	6.9 e)	$(1+x)^x$
6.2 d)	$3 \ln(5) + 2 \ln(2)$	6.6 d)	1	6.10 a)	$x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$
6.2 e)	$-2 \ln(5) + 4 \ln 2$	6.6 e)	-1	6.10 b)	$x \in [0, 1]$
6.2 f)	$2 \ln(5) - 2 \ln 2$	6.6 f)	e	6.10 c)	$x \geq \frac{2}{e}$
6.3	$-2 \ln(2) - 2 \ln(5)$	6.7 a)	impaire	6.10 d)	$x \geq -\frac{1}{12}$
6.4 a)	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$	6.7 b)	impaire	6.11 a)	$\emptyset$
6.4 b)	$17 + 12\sqrt{2}$	6.7 c)	impaire	6.11 b)	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$
6.4 c)	0	6.7 d)	impaire		
6.4 d)	0				

Corrigés

6.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln(16) = 4 \ln(2)$.

6.1 c) On a $0,125 = 1/8$ donc $\ln(0,125) = -\ln(8) = -3 \ln(2)$.

6.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln(72) - 2 \ln(3) = (3 \ln(2) + 2 \ln(3)) - 2 \ln(3) = 3 \ln(2)$.

6.2 c) On a $0,875 = 7/8$ donc

$$\begin{aligned} \ln(21) + 2 \ln(14) - 3 \ln(0,875) &= (\ln(3) + \ln(7)) + 2(\ln(2) + \ln(7)) - 3(\ln(7) - \ln(8)) \\ &= \ln(3) + 2 \ln(3) + 3 \times 3 \ln(2) = 3 \ln(3) + 11 \ln(2). \end{aligned}$$

6.3 On a

$$A = (\ln 1 - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \dots + (\ln(98) - \ln(99)) + (\ln(99) - \ln(100)).$$

En simplifiant les termes deux par deux, finalement, il reste $A = \ln(1) - \ln(100)$, c'est-à-dire $A = -\ln(100)$. Comme, par

ailleurs, $100 = 2^2 \times 5^2$, on en déduit le résultat : $A = -2(\ln(2) + \ln(5))$.
On peut écrire plus rigoureusement ce calcul. On a :

$$A = \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln(k) - \ln(k+1)) = \sum_{k=1}^{99} \ln(k) - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln(k) - \sum_{j=2}^{100} \ln(j)$$

en effectuant le changement d'indice $j = k + 1$; d'où, finalement, $A = \ln(1) - \ln(100) = -2(\ln(2) + \ln(5))$.

6.4 a) On a $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$. Donc,

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1) = \frac{7}{16} \ln((1 + \sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{7}{8} \ln(1 + \sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

D'où, finalement, $\alpha = -\frac{7}{8} \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{25}{8} \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

6.4 c) On a $\gamma = \ln\left(\left((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\right)^{20}\right) = \ln\left(\left(4 - 3\right)^{20}\right) = 0$

6.6 b) On a $e^{-\ln(\ln(2))} = e^{(-1)\ln(\ln(2))} = (\ln(2))^{-1} = \frac{1}{\ln(2)}$.

6.6 e) On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\exp(-\ln e^2)\right) = \frac{1}{2}(-\ln e^2) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$.

6.7 a) Pour $x \in]-1515, +1515[$, on a $f(-x) = \ln \frac{1515 - x}{1515 + x} = \ln \frac{1}{\frac{1515 + x}{1515 - x}} = -\ln \frac{1515 + x}{1515 - x} = -f_1(x)$.

6.7 b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x| < \sqrt{x^2 + 1}$; donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}\right) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln \frac{-x^2 + (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

6.11 b) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $] -\infty, -5[\cap \left(]61, +\infty[\cap] -\infty, -7[\right)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $] -\infty, -5[\cap \left(] -\infty, -7[\cup]61, +\infty[\right)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $] -\infty, -7[$.

Dans ce cas, un réel x appartenant à $] -\infty, -7[$ est solution de l'équation si, et seulement si, x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$.

Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \frac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in] -\infty, -7[$ et $x_2 \notin] -\infty, -7[$.