

Trigonométrie

Prérequis

Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Révisions : exercices de révision

 : exercices **difficiles**

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 7.1



Simplifier :

a) $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$

c) $\cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{4\pi}{3}$

b) $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$...

d) $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$.

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 7.2



Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$

Formules d'addition

Calcul 7.3



Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$ (on a $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$)

c) $\sin \frac{\pi}{12}$

b) $\cos \frac{\pi}{12}$

d) $\tan \frac{\pi}{12}$

Calcul 7.4



a) Simplifier : $\sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x)$

b) Simplifier : $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

Calcul 7.5



a) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

b) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$

Formules de duplication

Calcul 7.6



En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$ b) $\sin \frac{\pi}{8}$

Calcul 7.7



a) Simplifier : $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Simplifier : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$

Équations trigonométriques

Calcul 7.8



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$ h) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

d) $\tan x = -1$ i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$

Inéquations trigonométriques

Calcul 7.9



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

- | | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | <input type="text"/> | e) $\tan x \geq 1$ | <input type="text"/> |
| b) $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$ | <input type="text"/> | f) $ \tan x \geq 1$ | <input type="text"/> |
| c) $\sin x \leq \frac{1}{2}$ | <input type="text"/> | g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ | <input type="text"/> |
| d) $ \sin x \leq \frac{1}{2}$ | <input type="text"/> | h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$$\begin{aligned}
 &\{4\pi/3, 5\pi/3\} \quad \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad [0, 3\pi/4] \cup [5\pi/4, 2\pi] \\
 &[-\pi/4, 3\pi/4] \quad \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \quad \{-\pi/2, \pi/6, 5\pi/6\} \quad 0 \quad \{7\pi/6, 11\pi/6\} \\
 &\{\pi/7, 13\pi/7\} \quad [\pi/3, 5\pi/3] \quad 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \quad \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\
 &\tan x \quad \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad -\sin x \\
 &\left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\} \quad 4\cos^3 x - 3\cos x \quad 2 \quad \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\} \quad \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right] \quad \frac{1}{\cos x} \\
 &\left\{ \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad -\frac{1}{2} \quad \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi \right] \\
 &\left[-\pi, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right] \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right] \quad -2\cos x \quad -1 - \sqrt{3} \\
 &\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad 2\cos x \quad \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\} \quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\
 &\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \quad 0 \quad \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \quad \left\{ -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right\} \\
 &0 \quad [-3\pi/4, 3\pi/4] \quad \left[-\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right] \quad \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 &-\sin x \quad \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\} \quad \left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right] \quad \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \\
 &\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right] \quad \{5\pi/14, 9\pi/14\} \quad \left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\} \quad \{5\pi/14, 9\pi/14\} \\
 &\{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2\} \quad \{\pi/3, 5\pi/3\} \quad 0 \quad \left[0, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi \right] \quad 2 - \sqrt{3} \\
 &\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 &\{3\pi/4, 7\pi/4\} \quad \{-\pi/4, 3\pi/4\} \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \\
 &\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi \right] \quad \left\{ \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}
 \end{aligned}$$

► Réponses et corrigés page 4

Fiche n° 7. Trigonométrie

Réponses

7.1 a).....	0
7.1 b).....	0
7.1 c)	$-\frac{1}{2}$
7.1 d).....	$-1 - \sqrt{3}$
7.2 a).....	0
7.2 b)	$-\sin x$
7.2 c).....	$2 \cos x$
7.2 d).....	$-2 \cos x$
7.3 a)	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
7.3 b)	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
7.3 c).....	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
7.3 d).....	$2 - \sqrt{3}$
7.4 a)	$-\sin x$
7.4 b)	$\frac{1}{\cos x}$
7.5 a).....	0
7.5 b)	$4 \cos^3 x - 3 \cos x$
7.6 a).....	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$
7.6 b).....	$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$
7.7 a).....	$\tan x$
7.7 b).....	2
7.7 c).....	$8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$
7.8 a)	$\{\pi/3, 5\pi/3\}$
7.8 a)	$\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$

7.8 a)	$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
7.8 b)	$\{4\pi/3, 5\pi/3\}$
7.8 b)	$\left\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}\right\}$
7.8 b)	$\left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
7.8 c)	$\{7\pi/6, 11\pi/6\}$
7.8 c)	$\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$
7.8 c)	$\left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
7.8 d)	$\{3\pi/4, 7\pi/4\}$
7.8 d)	$\{-\pi/4, 3\pi/4\}$
7.8 d)	$\left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
7.8 e).....	$\{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$
7.8 e)	$\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
7.8 e).....	$\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
7.8 f)	$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
7.8 f)	$\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
7.8 f)	$\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
7.8 g)	$\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}$
7.8 g)	$\left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$

7.8 g) $\left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.8 h) $\{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2\}$

7.8 h) $\{-\pi/2, \pi/6, 5\pi/6\}$

7.8 h) $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.8 i) $\{\pi/7, 13\pi/7\}$

7.8 i) $\left\{ -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right\}$

7.8 i) $\left\{ \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.8 j) $\{5\pi/14, 9\pi/14\}$

7.8 j) $\{5\pi/14, 9\pi/14\}$

7.8 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.9 a) $[0, 3\pi/4] \cup [5\pi/4, 2\pi]$

7.9 a) $[-3\pi/4, 3\pi/4]$

7.9 b) $[\pi/3, 5\pi/3]$

7.9 b) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

7.9 c) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$

7.9 c) $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

7.9 d) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

7.9 d) $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

7.9 e) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$

7.9 e) $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

7.9 f) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$

7.9 f) $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

7.9 g) $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$

7.9 g) $[-\pi/4, 3\pi/4]$

7.9 h) $\left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$

7.9 h) $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$

Corrigés

7.3 a) Utilisons la relation $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition. On obtient :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

7.3 b) Pour commencer, remarquons que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Ainsi, avec les formules d'addition, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

7.3 c) De même, on a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

7.3 d) Grâce aux deux calculs précédents, on trouve :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

Simplifions encore ce résultat, en appliquant la méthode de la quantité conjuguée. On trouve :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}^2 + 1^2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

7.4 b) On a :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} - \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

7.5 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x \sin^2 x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

7.6 a) On a $\cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ donc $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$. De plus, $\cos \frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

7.6 b) On a $\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

7.7 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$.

7.7 b) On a $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$.

7.7 c) On a $\cos(4x) = 2 \cos^2(2x) - 1 = 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.

7.8 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ».

7.8 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6} \right\}$ et donc pour $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$.

7.8 h) Le réel $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \frac{1}{2}$.
Ainsi, les réels x solutions sont ceux tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$.

7.8 j) On a $\cos \frac{\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin \frac{5\pi}{14}$.

7.9 d) Cela revient à résoudre $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$.

7.9 f) On résout l'inéquation « $\tan(x) \geq 1$ ou $\tan(x) \leq -1$ ».

7.9 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geq 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$, ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

7.9 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geq 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$, ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}\right]$ puis $x \in \left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.