

Primitives

Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Révisions : exercices de révision

 : exercices **difficiles**

Pour chaque fonction à intégrer, on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 9.1



Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\frac{1}{t+1}$

c) $\frac{3}{(t+2)^3}$

b) $\frac{3}{(t+2)^2}$

d) $\sin(4t)$

Calcul 9.2



Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$

c) $\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$

b) e^{2t+1}

d) $\frac{1}{1+9t^2}$

Utilisation des formulaires

Calcul 9.3 — Dérivée d'une fonction composée (I).



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\frac{2t^2}{1+t^3}$

d) $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$

b) $t\sqrt{1+2t^2}$

e) $\frac{t}{1+3t^2}$

c) $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

f) $\frac{12t}{(1+3t^2)^3}$

Calcul 9.4 — Dérivée d'une fonction composée (II).



Même exercice.

a) $\frac{\ln^3 t}{t}$

d) $\frac{1}{t^2 \sqrt{t}}$

b) $\frac{1}{t \sqrt{\ln t}}$

e) $\frac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$

c) $\frac{8e^{2t}}{(3 - e^{2t})^3}$

f) $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$

Calcul 9.5 — Trigonométrie (I).



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2 t \sin t$

f) $\frac{\cos(\pi \ln t)}{t}$

k) $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t}$

b) $\cos(t)e^{\sin t}$

g) $\tan^2 t$

l) $\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^3}$

c) $\tan t$

h) $\tan^3 t$

m) $\frac{1}{1 + 4t^2}$

d) $\frac{\cos t}{1 - \sin t}$

i) $\frac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$

n) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$

e) $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

j) $\frac{1}{\cos^2(t) \sqrt{\tan t}}$

Calcul 9.6 — Trigonométrie réciproque.



Même exercice, pour ceux qui connaissent la fonction arcsin.

a) $\frac{\arcsin(t)}{\sqrt{1 - t^2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2} \arcsin(t)}$

Calcul 9.7 — Trigonométrie (II).



Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\cos^2 t$

e) $\frac{1}{\sin t \cos t}$

b) $\cos(t) \sin(3t)$

f) $\frac{1}{\sin^2(t) \cos^2(t)}$

c) $\sin^3 t$

g) $\frac{1}{\sin(4t)}$

d) $\frac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t}$

Calcul 9.8 — Fractions rationnelles.



Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\frac{t^2 + t + 1}{t^2}$		e) $\frac{t - 1}{t + 1}$	
b) $\frac{t^2 + 1}{t^3}$		f) $\frac{t^3}{t + 1}$	
c) $\frac{1 - t^6}{1 - t^2}$		g) $\frac{t - 1}{t^2 + 1}$	
d) $\frac{t^3 + 1}{t + 1}$		h) $\frac{t}{(t + 1)^2}$	

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 9.9



Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) $t^2 - 2t + 5$		j) $\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t}$	
b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$		k) $\frac{e^t}{2 + e^t}$	
c) $\sqrt{t} - \frac{1}{t^3}$		l) $\frac{\sin t}{2 + 3 \cos t}$	
d) $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t\sqrt{t}}$		m) $\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$	
e) $e^{2t} + e^{-3t}$		n) $\frac{\sin 2t}{1 + \cos^2 t}$	
f) e^{3t-2}		o) te^{-t^2}	
g) $\frac{t^2}{t^3 - 1}$		p) $\frac{1 - \ln t}{t}$	
h) $\frac{3t - 1}{t^2 + 1}$		q) $\frac{1}{t \ln t}$	
i) $\sin(t) \cos^2(t)$...		r) $\frac{\sin(\ln t)}{t}$	

Calcul 9.10 — *Bis repetita.*



Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Les calculs seront évidemment les mêmes, mais ce sera un bon entraînement supplémentaire !

Calcul 9.11 — Trigonométrie réciproque et hyperbolique.



Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) $\frac{e^t}{1+e^{2t}}$

b) $\sinh(t) \cosh(t)$

Réponses mélangées

$$\begin{aligned}
 & \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} \quad (1-2t^2)e^{-t^2} \text{ puis } -\frac{1}{2}e^{-t^2} \quad \cos t(3\cos^2 t - 2) \text{ puis } -\frac{1}{3}\cos^3 t \\
 & -\frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} \text{ puis } \ln|\ln t| \quad \frac{1}{4}\ln|\tan 2t| \quad \ln|t+1| \quad -\frac{t(t^3+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2} \text{ puis } \frac{1}{3}\ln(|t^3-1|) \\
 & \ln|1-e^{-t}+e^t| \quad -\frac{2t\sin\frac{1}{t}+\cos\frac{1}{t}}{t^4} \text{ puis } \cos\frac{1}{t} \quad -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t \quad -\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}} \quad -\frac{\cos(4t)}{4} \\
 & -e^{\frac{1}{t}} \quad \ln|t| - \frac{1}{2t^2} \quad t - 2\ln|t+1| \quad \ln(1+\sin^2 t) \quad \frac{1}{3}\arctan(3t) \quad \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \arctan(t) \\
 & \ln|\tan t| \quad \frac{1}{\pi}\sin(\pi \ln t) \quad t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \quad -\frac{1}{(1+3t^2)^2} \quad \frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\cos t| \quad -2\cos\sqrt{t} \\
 & -\ln|1-\sin t| \quad -\frac{3}{2(t+2)^2} \quad 2e^{2t} - 3e^{-3t} \text{ puis } \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-3t} \quad \frac{2(3\cos^2 t - 1)}{(1+\cos^2 t)^2} \text{ puis } -\ln(1+\cos^2(t)) \\
 & \frac{2}{(3-e^{2t})^2} \quad t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln|t+1| \quad \frac{\cos \ln t - \sin \ln t}{t^2} \text{ puis } -\cos(\ln t) \quad -\sqrt{1-t^2} \quad \frac{1}{2}(\arcsin(t))^2 \\
 & -\frac{1}{\tan t} \quad \frac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}} \quad \tan t - t \quad \frac{1}{2}\arcsin(2t) \quad \frac{1}{4}\tan^4 t \quad \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{t^4} \text{ puis } \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2t^2} \\
 & \frac{2\cos t + 3}{(2+3\cos t)^2} \text{ puis } -\frac{1}{3}\ln|2+3\cos t| \quad \arctan(e^t) \quad -\cot t + \tan t \quad -\ln|\cos t| \\
 & 2(t-1) \text{ puis } \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t \quad \sinh(t)^2 + \cosh^2(t) \text{ puis } \frac{1}{2}\sinh^2(t) \quad 2\sqrt{\ln t} \quad t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \\
 & 3e^{3t-2} \text{ puis } \frac{1}{3}e^{3t-2} \quad \frac{2e^t}{(2+e^t)^2} \text{ puis } \ln(2+e^t) \quad e^{\sin t} \quad -\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{t}+1\right) \text{ puis } -\frac{1}{t} + \ln|t| \\
 & \frac{\ln t - 2}{t^2} \text{ puis } \ln t - \frac{1}{2}\ln^2 t \quad \frac{1}{2}\arctan(2t) \quad -\frac{e^t(e^{2t}-1)}{(1+e^{2t})^2} \text{ puis } \arctan(e^t) \quad \frac{2}{3}\ln|1+t^3| \\
 & \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \quad -\frac{3t^2-2t-3}{(t^2+1)^2} \text{ puis } \frac{3}{2}\ln(t^2+1) - \arctan(t) \quad -\frac{1}{3}\cos^3 t \quad \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\sin t)^2} \quad t + \ln|t| - \frac{1}{t} \\
 & 2\sqrt{\tan t} \quad \frac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}} \quad \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} \quad \ln|\arcsin(t)| \quad \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \text{ puis } -\sqrt{1-t^2} \quad \frac{1}{4}\ln^4 t \\
 & -\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4} \quad -\frac{4}{t^5} - \frac{3}{2}t^{\frac{1}{5/2}} \text{ puis } -\frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{\sqrt{t}} \quad \frac{1}{6}\ln(1+3t^2) \quad -\frac{3}{t+2} \quad \frac{1}{2}e^{2t+1}
 \end{aligned}$$

► Réponses et corrigés page 5

Fiche n° 9. Primitives

Réponses

9.1 a)	$\ln t + 1 $	9.4 e)	$\ln 1 - e^{-t} + e^t $
9.1 b)	$-\frac{3}{t + 2}$	9.4 f)	$-e^{\frac{1}{t}}$
9.1 c)	$-\frac{3}{2(t + 2)^2}$	9.5 a)	$-\frac{1}{3} \cos^3 t$
9.1 d)	$-\frac{\cos(4t)}{4}$	9.5 b)	$e^{\sin t}$
9.2 a)	$\frac{2}{3}(1 + t)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$	9.5 c)	$-\ln \cos t $
9.2 b)	$\frac{1}{2}e^{2t+1}$	9.5 d)	$-\ln 1 - \sin t $
9.2 c)	$\frac{1}{2} \arcsin(2t)$	9.5 e)	$-2 \cos \sqrt{t}$
9.2 d)	$\frac{1}{3} \arctan(3t)$	9.5 f)	$\frac{1}{\pi} \sin(\pi \ln t)$
9.3 a)	$\frac{2}{3} \ln 1 + t^3 $	9.5 g)	$\tan t - t$
9.3 b)	$\frac{1}{6}(1 + 2t^2)^{\frac{3}{2}}$	9.5 h)	$\frac{1}{2} \tan^2 t + \ln \cos t $
9.3 c)	$-\sqrt{1 - t^2}$	9.5 i)	$\frac{1}{4} \tan^4 t$
9.3 d)	$\frac{3}{4}(1 + 7t^2)^{\frac{2}{3}}$	9.5 j)	$2\sqrt{\tan t}$
9.3 e)	$\frac{1}{6} \ln(1 + 3t^2)$	9.5 k)	$-\frac{1}{\tan t}$
9.3 f)	$-\frac{1}{(1 + 3t^2)^2}$	9.5 l)	$\frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \sin t)^2}$
9.4 a)	$\frac{1}{4} \ln^4 t$	9.5 m)	$\frac{1}{2} \arctan(2t)$
9.4 b)	$2\sqrt{\ln t}$	9.5 n)	$\arctan(e^t)$
9.4 c)	$\frac{2}{(3 - e^{2t})^2}$	9.6 a)	$\frac{1}{2} (\arcsin(t))^2$
9.4 d)	$-\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$	9.6 b)	$\ln \arcsin(t) $
		9.7 a)	$\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}$
		9.7 b)	$-\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4}$
		9.7 c)	$-\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t$

9.7 d) $\ln(1 + \sin^2 t)$

9.7 e) $\ln |\tan t|$

9.7 f) $-\cotant + \tan t$

9.7 g) $\frac{1}{4} \ln |\tan 2t|$

9.8 a) $t + \ln |t| - \frac{1}{t}$

9.8 b) $\ln |t| - \frac{1}{2t^2}$

9.8 c) $t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$

9.8 d) $t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

9.8 e) $t - 2 \ln |t + 1|$

9.8 f) $t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln |t + 1|$

9.8 g) $\frac{1}{2} \ln(1 + t^2) - \arctan(t)$

9.8 h) $\ln |t + 1| + \frac{1}{t + 1}$

9.9 a) $2(t - 1)$ puis $\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t$

9.9 b) $-\frac{1}{t^2} \left(\frac{2}{t} + 1 \right)$ puis $-\frac{1}{t} + \ln |t|$

9.9 c) $\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{t^4}$ puis $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2t^2}$

9.9 d) $-\frac{4}{t^5} - \frac{3}{2} \frac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\frac{1}{3} \frac{1}{t^3} - \frac{2}{\sqrt{t}}$

9.9 e) $2e^{2t} - 3e^{-3t}$ puis $\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-3t}$

9.9 f) $3e^{3t-2}$ puis $\frac{1}{3}e^{3t-2}$

9.9 g) $-\frac{t(t^3 + 2)}{(t - 1)^2(t^2 + t + 1)^2}$ puis $\frac{1}{3} \ln(|t^3 - 1|)$

9.9 h) $-\frac{3t^2 - 2t - 3}{(t^2 + 1)^2}$ puis $\frac{3}{2} \ln(t^2 + 1) - \arctan(t)$

9.9 i) $\cos t(3 \cos^2 t - 2)$ puis $-\frac{1}{3} \cos^3 t$

9.9 j) $-\frac{2t \sin \frac{1}{t} + \cos \frac{1}{t}}{t^4}$ puis $\cos \frac{1}{t}$

9.9 k) $\frac{2e^t}{(2 + e^t)^2}$ puis $\ln(2 + e^t)$

9.9 l) $\frac{2 \cos t + 3}{(2 + 3 \cos t)^2}$ puis $-\frac{1}{3} \ln |2 + 3 \cos t|$

9.9 m) $\frac{1}{(1 - t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1 - t^2}$

9.9 n) $2 \frac{3 \cos^2 t - 1}{(1 + \cos^2 t)^2}$ puis $-\ln(1 + \cos^2(t))$

9.9 o) $(1 - 2t^2)e^{-t^2}$ puis $-\frac{1}{2}e^{-t^2}$

9.9 p) $\frac{\ln t - 2}{t^2}$ puis $\ln t - \frac{1}{2} \ln^2 t$

9.9 q) $-\frac{1 + \ln t}{t^2 \ln^2 t}$ puis $\ln |\ln t|$

9.9 r) $\frac{\cos \ln t - \sin \ln t}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t)$

9.11 a) $-\frac{e^t(e^{2t} - 1)}{(1 + e^{2t})^2}$ puis $\arctan(e^t)$

9.11 b) $\sinh(t)^2 + \cosh^2(t)$ puis $\frac{1}{2} \sinh^2(t)$

Corrigés

9.1 a) Admet des primitives sur $] - \infty, -1[$ ou $] -1, +\infty[$.

9.1 b) Admet des primitives sur $] - \infty, -2[$ ou $] -2, +\infty[$.

9.2 a) Admet des primitives sur $]0, +\infty[$.

9.2 c) Admet des primitives sur $] -1/2, 1/2[$.

9.2 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

9.5 g) On a $\int^t \tan^2 \theta \, d\theta = \int^t ((1 + \tan^2 \theta) - 1) \, d\theta = \tan t - t + C^{\text{ste}}$.

9.5 h) On a $\int^t \tan^3 \theta \, d\theta = \int^t ((\tan^2 \theta + 1) \tan \theta - \tan \theta) \, d\theta = \frac{1}{2} \tan^2 t + \ln |\cos t| + C^{\text{ste}}$.

9.7 a) On a $\int^x \cos^2 \theta \, d\theta = \int^t \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C^{\text{ste}}$.

9.7 b) On a :
$$\begin{aligned} \int^t \cos(\theta) \sin(3\theta) \, d\theta &= \int^t \frac{1}{2} (\sin(3\theta + \theta) + \sin(3\theta - \theta)) \, d\theta \\ &= \int^t \frac{1}{2} (\sin(4\theta) + \sin(2\theta)) \, d\theta = -\frac{\cos(4t)}{8} - \frac{\cos(2t)}{4} + C^{\text{ste}}. \end{aligned}$$

9.7 c) On a $\int^t \sin^3 \theta \, d\theta = \int^t (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta = -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t + C^{\text{ste}}$.

9.7 d) On a $\int^t \frac{\sin(2\theta)}{1 + \sin^2 \theta} \, d\theta = \int^t \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta} \, d\theta = \ln(1 + \sin^2 t) + C^{\text{ste}}$.

9.7 e) On a $\int^t \frac{d\theta}{\sin \theta \cos \theta} = \int^t \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \, d\theta = \int^t \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \, d\theta = \ln |\sin t| - \ln |\cos t| + C^{\text{ste}} = \ln |\tan t| + C^{\text{ste}}$.

9.7 f) On a $\int^t \frac{d\theta}{\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} = \int^t \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} \, d\theta = \int^t \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \, d\theta = -\cotan(t) + \tan(t) + C^{\text{ste}}$.

9.7 g) On a :

$$\begin{aligned} \int^t \frac{d\theta}{\sin(4\theta)} &= \int^t \frac{\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)}{2 \sin(2\theta) \cos(2\theta)} \, d\theta \\ &= \int^t \frac{1}{4} \left(\frac{2 \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} + \frac{2 \sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} \right) \, d\theta = \frac{1}{4} \ln |\sin(2t)| - \frac{1}{4} \ln |\cos(2t)| + C^{\text{ste}} = \frac{1}{4} \ln |\tan 2t| + C^{\text{ste}}. \end{aligned}$$

9.8 c) On a $1 - t^6 = 1^3 - (t^2)^3 = (1 - t^2)(1 + t^2 + t^4)$ donc finalement on cherche une primitive de $1 + t^2 + t^4$.

9.8 e) On a $\int^t \frac{\theta - 1}{\theta + 1} \, d\theta = \int^t \frac{\theta + 1 - 2}{\theta + 1} \, d\theta = \int^t \left(1 - \frac{2}{\theta + 1} \right) \, d\theta = t - 2 \ln |t + 1| + C^{\text{ste}}$.

9.8 f) On a $\int^t \frac{\theta^3}{\theta + 1} \, d\theta = \int^t \frac{\theta^3 + 1 - 1}{\theta + 1} \, d\theta = \int^t \frac{(\theta + 1)(1 - \theta + \theta^2) - 1}{\theta + 1} \, d\theta = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln |t + 1| + C^{\text{ste}}$.

9.8 h) On a $\int^t \frac{\theta}{(\theta + 1)^2} \, d\theta = \int^t \frac{\theta + 1 - 1}{(\theta + 1)^2} \, d\theta = \int^t \left(\frac{1}{\theta + 1} - \frac{1}{(\theta + 1)^2} \right) \, d\theta = \ln |t + 1| + \frac{1}{t + 1} + C^{\text{ste}}$.