

Calcul d'intégrales

Révisions : exercices de révision

 : exercices **difficiles**

Intégrales et aires algébriques

Calcul 10.1



Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^3 x^2 + e^x dx$

b) $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx$

c) $\int_0^{-1} \sin x dx$

Calcul 10.2



En se ramenant à des aires, calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 7 dx$

d) $\int_2^8 (1 - 2x) dx$

b) $\int_7^{-3} -5 dx$

e) $\int_{-2}^2 \sin x dx$

c) $\int_0^7 3x dx$

f) $\int_{-2}^1 |x| dx$

Calcul d'intégrales

Calcul 10.3 — Polynômes.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^3 2 dx$

c) $\int_{-2}^0 (x^2 + x + 1) dx$

b) $\int_1^3 (2x - 5) dx$

d) $\int_{-1}^1 (3x^5 - 5x^3) dx$

e) $\int_0^1 (x^5 - x^4) dx \dots\dots\dots$

f) $\int_1^{-1} x^{100} dx \dots\dots\dots$

Calcul 10.4 — Fonctions usuelles.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx \dots\dots\dots$

d) $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \dots\dots\dots$

b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx \dots\dots\dots$

e) $\int_{-3}^2 e^x dx \dots\dots\dots$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \dots\dots\dots$

f) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} \dots\dots\dots$

Calcul 10.5 — De la forme $f(ax + b)$.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^2 (2x + 1)^3 dx \dots\dots\dots$

d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx \dots\dots\dots$

b) $\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx \dots\dots\dots$

e) $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \dots\dots\dots$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2} \dots\dots\dots$

f) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx \dots\dots\dots$

Calcul 10.6 — Fonctions composées.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx \dots\dots\dots$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x^2 + 1) dx \dots\dots\dots$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx \dots\dots\dots$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx \dots\dots\dots$

e) $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx \dots\dots\dots$

f) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx \dots\dots\dots$

Calcul 10.7 — Divers.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$

b) $\int_{-2}^3 |x+1| dx$

c) $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$

d) $\int_1^e \frac{3x - 2 \ln x}{x} dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) dx$

f) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| dx$

Calcul 10.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.



a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin x dx$

d) $\int_0^1 \operatorname{ch}(x) dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

e) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

c) $\int_0^2 10^x dx$

f) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} dx$

Réponses mélangées

Positif	$e^2 - e^{-3}$	$-\ln 3$	0	$\frac{2\pi}{9}$	$2(e^3 - 1)$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{e+1}$	0	1	0	$\frac{7}{48}$
$\frac{1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$	8	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	-2	$3e - 4$	18	78	$\frac{2}{3}$	$\frac{17}{2}$	$-\frac{1}{384}$	$\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$
$-\frac{1}{30}$	$-\frac{2}{101}$	$\frac{5}{8}$	-54	$\frac{e - \frac{1}{e}}{2}$	0	Négatif	e^2	$\frac{99}{\ln 10}$	6	$\frac{1}{2}$
50	$\frac{147}{2}$	0	14	Positif	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{3}$

► Réponses et corrigés page 4

Fiche n° 10. Calcul d'intégrales

Réponses

10.1 a).....	Positif	10.3 e).....	$-\frac{1}{30}$	10.5 e).....	6	10.7 c).....	e^2
10.1 b).....	Négatif	10.3 f).....	$-\frac{2}{101}$	10.5 f).....	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	10.7 d).....	$3e - 4$
10.1 c).....	Positif	10.4 a).....	0	10.6 a).....	0	10.7 e).....	$-\frac{1}{3}$
10.2 a).....	14	10.4 b).....	1	10.6 b).....	0	10.7 f).....	$\frac{5}{8}$
10.2 b).....	50	10.4 c).....	$\frac{1}{2}$	10.6 c).....	$\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	10.8 a).....	0
10.2 c).....	$\frac{147}{2}$	10.4 d).....	18	10.6 d).....	$-\frac{1}{384}$	10.8 b).....	$\frac{\pi}{4}$
10.2 d).....	-54	10.4 e).....	$e^2 - e^{-3}$	10.6 e).....	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$	10.8 c).....	$\frac{99}{\ln 10}$
10.2 e).....	0	10.4 f).....	$-\ln 3$	10.6 f).....	$\frac{7}{48}$	10.8 d).....	$\frac{e - \frac{1}{e}}{2}$
10.2 f).....	$\frac{5}{2}$	10.5 a).....	78	10.7 a).....	$\frac{1}{2} - \frac{1}{e+1}$	10.8 e).....	$\frac{2}{3}$
10.3 a).....	8	10.5 b).....	$2(e^3 - 1)$	10.7 b).....	$\frac{17}{2}$	10.8 f).....	$\frac{2\pi}{9}$
10.3 b).....	-2	10.5 c).....	$\frac{1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$				
10.3 c).....	$\frac{8}{3}$	10.5 d).....	$\frac{\sqrt{2}}{6}$				
10.3 d).....	0						

Corrigés

10.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

10.1 b) $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx = -\int_{-3}^5 |\sin 7x| dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive. Le signe de l'intégrale initiale est donc négatif.

10.1 c) $\int_0^{-1} \sin x dx = -\int_{-1}^0 \sin x dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. La fonction sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$; donc, l'intégrale $\int_{-1}^0 \sin x dx$ est négative. Le signe de l'intégrale initiale est donc positif.

10.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

10.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\int_7^{-3} -5 dx = -\int_{-3}^7 -5 dx = \int_{-3}^7 5 dx$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

10.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O , le point $A(7; 0)$ et le point $B(7; 21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\frac{1}{2} \times AO \times AB$.

10.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative. Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2; 0)$, $B(8; 0)$, $C(8; -15)$ et $D(2; -3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\frac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

10.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\int_{-2}^2 \sin x \, dx = \int_{-2}^0 \sin x \, dx + \int_0^2 \sin x \, dx$. La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\int_{-2}^0 \sin x \, dx$ et $\int_0^2 \sin x \, dx$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

10.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

10.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

10.3 b)
$$\int_1^3 2x - 5 \, dx = \left[x^2 - 5x \right]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$$

10.3 c)
$$\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-2}^0 = 0 - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2 \right) = \frac{8}{3}.$$

10.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.3 e)
$$\int_0^1 x^5 - x^4 \, dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$$

10.3 f)
$$\int_1^{-1} x^{100} \, dx = \left[\frac{1}{101}x^{101} \right]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$$

10.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.4 b)
$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

10.4 c)
$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

10.4 d)
$$\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \left[2\sqrt{x} \right]_1^{100} = 18.$$

10.4 e)
$$\int_{-3}^2 e^x \, dx = \left[e^x \right]_{-3}^2 = e^2 - e^{-3}.$$

10.4 f)
$$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} = \left[\ln |x| \right]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$$

10.5 a)
$$\int_{-1}^2 (2x + 1)^3 \, dx = \left[\frac{1}{8}(2x + 1)^4 \right]_{-1}^2 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$$

10.5 b)
$$\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} \, dx = \left[2e^{\frac{1}{2}x+1} \right]_{-2}^4 = 2(e^3 - 1).$$

10.5 c)
$$\int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2} = \left[\frac{1}{\pi} \ln |\pi x + 2| \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{\pi + 2}{2}\right).$$

10.5 d)
$$\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \, dx = \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) \right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

10.5 e)
$$\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \, dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10 - 1) = 6.$$

10.5 f)
$$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \, dx = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10.6 a)
$$\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) \right]_1^3 = 0.$$

10.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.6 c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} x \, dx = \left[-\ln(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

10.6 d)
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 \, dx = \left[-\frac{1}{6} (\cos x)^6 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

10.6 e)
$$\int_0^1 x e^{x^2-1} \, dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

10.6 f)
$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} \, dx = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{(x^2+1)^3} \right]_0^1 = \frac{7}{48}.$$

10.7 a)
$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} \, dx = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \, dx = \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^1 = -\frac{1}{e+1} + \frac{1}{2}.$$

10.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2, -1]$ et positif sur $[-1, 3]$. On en déduit : $\int_{-2}^3 |x+1| \, dx = \int_{-2}^{-1} -x-1 \, dx + \int_{-1}^3 x+1 \, dx.$

Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

10.7 c)
$$\int_{-1}^2 \max(1, e^x) \, dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^2 e^x \, dx = e^2.$$

10.7 d)
$$\int_1^e \frac{3x - 2 \ln x}{x} \, dx = 3 \int_1^e dx - 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = 3(e-1) - 2 \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = 3e - 4.$$

10.7 e) On calcule :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^2(x) - 1) \sin(x) \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin(x) \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx \\ &= -\frac{2}{3} \left[\cos^3(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

10.7 f)
$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| \, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{1}{2} \sin(2x) \right| \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)| \, dx.$$
 Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ et positif sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, il suit que :

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)| \, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 -\sin(2x) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\cos(2x) \right]_{-\frac{\pi}{3}}^0 - \frac{1}{2} \left[\cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

Le résultat final est donc $\frac{5}{8}$.

10.8 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

10.8 b)
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \left[\arctan(x) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

10.8 c)
$$\int_0^2 10^x \, dx = \int_0^2 e^{x \ln 10} \, dx = \left[\frac{1}{\ln 10} e^{x \ln 10} \right]_0^2 = \frac{e^{2 \ln 10} - 1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$$

10.8 d)
$$\int_0^1 \operatorname{ch}(x) \, dx = \left[\operatorname{sh}(x) \right]_0^1 = \operatorname{sh}(1) = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}.$$

10.8 e)
$$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

10.8 f)
$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \, dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2} \, dx = 2 \left[\frac{1}{3} \arctan(3x) \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3} \arctan(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$$