

Intégration par parties

Prérequis

Primitives, dérivées, intégration par parties.

Attention : les fonctions arccos, arcsin et arctan seront traitées dans le chapitre 10.

 : exercices **difficiles**

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Intégrales

Calcul 11.1



Calculer :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$

g) $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$

b) $\int_0^1 (2t+3)\text{sh}(2t) dt$

h) $\int_0^1 t \arctan t dt$

c) $\int_0^2 t e^{\frac{t}{2}} dt$

i) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t dt$

d) $\int_1^{\ln(2)} t 2^t dt$

j) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$

e) $\int_1^e \ln t dt$

k) $\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt$

f) $\int_1^2 t \ln t dt$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt$

Primitives

Calcul 11.2



Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \mapsto (-x+1)e^x \dots$

c) $x \mapsto \arctan(x) \dots\dots$

b) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2} \dots\dots\dots$

d) $x \mapsto x \operatorname{ch}(x) \dots\dots\dots$

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 11.3 — Calcul d'intégrales.



a) $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt \dots\dots\dots$

▲ Calcul 11.4 — Calcul de primitives.



Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \sin(x) \operatorname{sh}(x) \dots$

c) $x \mapsto (x \ln x)^2 \dots\dots$

b) $x \mapsto \ln^2 x \dots\dots\dots$

d) $x \mapsto e^{\arccos(x)} \dots\dots$

Réponses mélangées

$$\frac{(\ln(2))^{2\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2} \quad \frac{5}{2}\operatorname{ch}(2) - \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2) - \frac{3}{2} \quad \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(-\cos(x)\operatorname{sh}(x) + \sin(x)\operatorname{ch}(x)) \end{array} \right. \quad -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi^2}{32} \quad 4 \quad \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9} \quad 1 \quad \left\{ \begin{array}{l}]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}e^{\arccos(x)}(x - \sqrt{1-x^2}) \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi}{2} - 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \left(\frac{1}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}\ln x + \frac{2}{27} \right) \end{array} \right. \quad \frac{5}{2} - e^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)e^x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) \end{array} \right. \quad \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1+\ln x}{x} \end{array} \right. \quad 2\ln(2) - \frac{3}{4} \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

► Réponses et corrigés page 3

Fiche n° 11. Intégration par parties

Réponses

11.1 a) $\frac{\pi}{2} - 1$

11.1 b) $\frac{5}{2}\text{ch}(2) - \frac{1}{2}\text{sh}(2) - \frac{3}{2}$

11.1 c) 4

11.1 d) $\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2 \ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$

11.1 e) 1

11.1 f) $2 \ln(2) - \frac{3}{4}$

11.1 g) $\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$

11.1 h) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

11.1 i) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

11.1 j) $-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$

11.1 k) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$

11.1 l) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi^2}{32}$

11.2 a) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)e^x \end{cases}$

11.2 b) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1+\ln x}{x} \end{cases}$

11.2 c) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}$

11.2 d) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \text{sh}(x) - \text{ch}(x) \end{cases}$

11.3 a) $\frac{5}{2} - e^2$

11.3 b) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$

11.4 a) ... $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(-\cos(x)\text{sh}(x) + \sin(x)\text{ch}(x)) \end{cases}$

11.4 b) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \end{cases}$

11.4 c) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \left(\frac{1}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} \ln x + \frac{2}{27} \right) \end{cases}$

11.4 d) .. $\begin{cases}]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}e^{\arccos(x)}(x - \sqrt{1-x^2}) \end{cases}$

Corrigés

11.1 a) On choisit $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t$. On a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt = \left[t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} - 1$.

11.1 b) On choisit $u'(t) = \text{sh}(2t)$ et $v(t) = 2t + 3$. On a :

$$\int_0^1 (2t+3)\text{sh}(2t) \, dt = \left[(2t+3)\frac{\text{ch}(2t)}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \text{ch}(2t) \, dt = \frac{5}{2}\text{ch}(2) - \frac{3}{2} - \frac{\text{sh}(2)}{2}.$$

11.1 c) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = e^{\frac{t}{2}}$. On a $\int_0^2 t e^{\frac{t}{2}} \, dt = \left[2t e^{\frac{t}{2}} \right]_0^2 - 2 \int_0^2 e^{\frac{t}{2}} \, dt = 4e - 4 \left[e^{\frac{t}{2}} \right]_0^2 = 4$.

11.1 d) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = 2^t$. On a :

$$\begin{aligned}\int_1^{\ln(2)} t 2^t dt &= \int_1^{\ln(2)} t e^{t \ln(2)} dt = \left[t \frac{1}{\ln(2)} 2^t \right]_1^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{\ln(2)} e^{t \ln(2)} dt = 2^{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2} [2^t]_1^{\ln(2)} \\ &= \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2 \ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}.\end{aligned}$$

11.1 e) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. On a $\int_1^e \ln t dt = \left[t \ln t \right]_1^e - \int_1^e 1 dt = e - (e - 1) = 1$.

11.1 f) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$. On a $\int_1^2 t \ln t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} t dt = 2 \ln(2) - \frac{1}{4} [t^2]_1^2 = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$.

11.1 g) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1 + t^2)$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt &= [t \ln(1 + t^2)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dt = \ln(2) - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt \\ &= \ln(2) - 2 \left[t - \arctan(t) \right]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

11.1 h) On a $\int_0^1 t \arctan t dt = \left[\frac{t^2}{2} \arctan t \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

11.1 i) On a $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t dt = \left[t \arcsin t \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1 - t^2} \right]_0^{\frac{1}{2}}$.

11.1 j) On a $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t}} dt = \left[2t\sqrt{1 + t} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{1 + t} dt = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} \left[(1 + t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$.

11.1 k) On choisit $u'(t) = \sqrt{1 + t}$ et $v(t) = \ln(1 + t)$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + t} \ln(1 + t) dt &= \left[\frac{2}{3} (1 + t)^{\frac{3}{2}} \ln(1 + t) \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{1 + t} dt = \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln(2) - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} (1 + t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln(2) - \frac{8}{9} \sqrt{2} + \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

11.1 l) On a $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t (1 + \tan^2 t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt$. On choisit, dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1 + \tan^2 t$. On obtient $\left[t \tan t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \left[\ln \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi^2}{32}$.

11.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$. En choisissant $u'(t) = e^t$ et $v(t) = -t + 1$, on a $\int_0^x (-t + 1) e^t dt = \left[(-t + 1) e^t \right]_0^x + \int_0^x e^t dt = (-x + 1) e^x + e^x - 2 = (-x + 2) e^x - 2$.

11.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$. Par intégration par parties avec $u'(t) = \frac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$.

11.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\int_0^x \arctan(t) dt = \left[t \arctan t \right]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1 + t^2} dt = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$. D'où une primitive.

11.2 d) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^x t \operatorname{ch}(t) dt = \left[t \operatorname{sh}(t) \right]_0^x - \int_0^x \operatorname{sh}(t) dt = x \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) + 1$.

11.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, on prend $u'(t) = e^{2t}$ et $v(t) = t^2 + 3t - 4$, et on trouve $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4) e^{2t} dt = \left[(t^2 + 3t - 4) \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (2t + 3) \frac{e^{2t}}{2} dt$. Puis, pour la seconde intégration par parties, avec $v(t) = 2t + 3$ et $u'(t) = \frac{e^{2t}}{2}$, on trouve :

$$- \int_0^1 (2t + 3) \frac{e^{2t}}{2} dt = 2 - \left[(2t + 3) \frac{e^{2t}}{4} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2t} dt = \frac{11}{4} - \frac{5}{4} e^2 + \frac{1}{4} [e^{2t}]_0^1 = \frac{5}{2} - e^2.$$

.....
11.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$, d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \, dt = [e^t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt$. Ensuite, avec $u' = \exp$ et $v = \cos$, on trouve $e^{\frac{\pi}{2}} - [e^t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \, dt$. Finalement, on a $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \, dt = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

11.4 a) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \sin(t) \operatorname{sh}(t) \, dt$. On commence par choisir $u' = \sin$ et $v = \operatorname{sh}$; cela donne $\int_0^x \sin(t) \operatorname{sh}(t) \, dt = [-\cos(t) \operatorname{sh}(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t) \operatorname{ch}(t) \, dt$. Puis, on choisit $u' = \cos$ et $v = \operatorname{ch}$, ce qui donne $-\cos(x) \operatorname{sh}(x) + [\sin(t) \operatorname{ch}(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t) \operatorname{sh}(t) \, dt$. Finalement, on a $\int_0^x \sin(t) \operatorname{sh}(t) \, dt = \frac{1}{2}(-\cos(x) \operatorname{sh}(x) + \sin(x) \operatorname{ch}(x))$.

11.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$. En choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$, on obtient $\int_1^x \ln^2 t \, dt = [t \ln^2 t]_1^x - \int_1^x 2 \ln t \, dt$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient :

$$x \ln^2 x - 2 \left[t \ln t \right]_1^x + 2 \int_1^x 1 \, dt = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x - 2.$$

.....
11.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$. Avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a :

$$\int_1^x t^2 \ln^2 t \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \ln^2 t \right]_1^x - \frac{2}{3} \int_1^x t^2 \ln t \, dt.$$

Puis, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} \left[t^3 \ln t \right]_1^x + \frac{2}{9} \int_1^x t^2 \, dt = \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} (x^3 - 1)$.

11.4 d) Soit $x \in]-1, 1[$. En posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^{\arccos(t)}$, on obtient :

$$\int_0^x e^{\arccos(t)} \, dt = \left[t e^{\arccos(t)} \right]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} e^{\arccos(t)} \, dt.$$

Ensuite, en posant $u'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $v(t) = e^{\arccos(t)}$, on obtient :

$$x e^{\arccos(x)} - \left[\sqrt{1-t^2} e^{\arccos(t)} \right]_0^x + \int_0^x \sqrt{1-t^2} \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} e^{\arccos(t)} \, dt = x e^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2} e^{\arccos(x)} + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^x e^{\arccos(t)} \, dt.$$

Ainsi, on a $\int_0^x e^{\arccos(t)} \, dt = \frac{1}{2} e^{\arccos(x)} (x - \sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}}$.
